De Broglies Ansatz für eine relativistische „Bohmsche“ Quantenmechanik

Überarbeitete Version vom 17. Februar 2004

Ulrike Neemann

27.Februar,2002

Einleitung

Im Jahre 1952 veröffentlichte David Bohm seine „hidden variable“ Theorie der Quantenmechanik [1]. Schon in den 20er Jahren hatte Louis de Broglie eine ähnliche Theorie vorgestellt, die auf die selben Grundgleichungen führte. Er nannte diese Theorie „pilot wave theory“. Diese Idee verwarf er jedoch aufgrund der starken Kritik auf der Solvay Konferenz 1926.

Erst in den 50er Jahren, nach der Veröffentlichung der „Bohmschen Theorie“, arbeitete de Brogie weiter an seiner Theorie und erweiterte sie auf relativistische Betrachtungen [2]. Er formulierte eine „Führungsgleichung“ für bosonische Teilchen. Diese werden durch Wellenfunktionen als Lösung der Klein-Gordon Gleichung beschrieben.

Es ist bekannt, dass die, durch de Broglies Gleichungen berechneten Vierer-Impulse nicht immer zeitartig bleiben und unter Umständen auch nicht immer zukunftsgerichtet sind.

In dieser Arbeit wird gezeigt, dass eine Dreier-Geschwindigkeit formuliert werden kann, die allerdings überlichtschnell wird. Die Energie des Teilchens bleibt jedoch immer reell, auch wenn die Geschwindigkeit des Teilchens größer als Lichtgeschwindigkeit wird.

Anhand von numerischen Beispielen wird verdeutlicht, wie die Bewegungen von Teilchen aussehen. Es wird eine Methode, Geschwindigkeiten zu integrieren, angegeben, mit der es möglich ist, auch Bahnen zu simulieren, die nicht immer mit der Zeit fortschreiten.

Außerdem werden aus Ensembles von Trajektorien gemittelte Trajektorien und die mittleren Geschwindigkeitn der Trajektorien berechnet und mit den konvenionell berechneten Erwartungswerten verglichen.

Die Arbeit teilt sich in zwei Abschnitte. In Kapitel 1 wird die konventionelle Quantenmechanik und deren Problematik kurz erläutert. Die Bohmsche Mechanik wird erklärt und die Herleitung der Gleichungen skizziert. De Broglies relativistische Führungsgleichung wird hergeleitet. Am Ende des 1. Kapitels wird das Auftreten von Überlichtgeschindigkeit diskutiert.

In Kapitel 2 werden numerische und auch analytische Beispiele durchgeführt. Es wird als nicht-relativistisches Beispiel ein „Test-Teilchen“, das durch eine Wellenfunktion in einem Kastenpotential beschrieben wird, simuliert. Außerdem wird die Geschwindigkeit eines durch ein freies Gaußpaket beschriebenes Teilchen analytisch berechnet. Ein relativistisches Beispiel ist die Simulation eines “Test-Teilchens“ in einem skalaren Kastenpotential, wobei die entsprechende Wellenfunktion eine Überlagerung von Eigenfunktionen ist. Diese sind als Lösung der Klein-Gordon Gleichung gegeben. Außerdem wird ein Teilchen, dargestellt durch ein Gaußpaket, in einem skalaren Kastenpotential simuliert. Hierbei ist das Gaußpaket durch Überlagerung von Eigenfunktionen angenähert.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Grundlagen zur Quantenmechanik

1.1 Quantenformalismus

Ohne eine Interpretation ist die Quantenmechanik eine Vorschrift zur Behandlung von Wellenfunktionen. Dieses Konzept ist korrekt und soll hier nicht diskutiert werden.

Quantenmechanische Systeme werden durch Wellenfunktionen beschrieben. In der nicht-relativistischen Quantenmechanik ist die Zeitentwicklung einer Wellenfunktion durch die Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + V\Psi$$

bestimmt.

In relativistischen Betrachtungen wird eine Zeitentwicklungen zum Beispiel durch die Klein-Gordon- oder Dirac-Gleichung beschrieben.

Auf eine Wellenfunktion können Operatoren angewandt werden. Die Wellenfunktion ψ ist Eigenfunktion des Operators A mit Eigenwert a, wenn gilt

$$A|\psi\rangle = a|\psi\rangle.$$

Eigenwerte von hermitischen Operatoren sind reell. Die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Sie bilden ein vollständiges Orthonormalsystem. Eine allgemeine Wellenfunktion kann in Eigenfunktionen ψ_n entwickelt werden

$$\Psi = \sum_n c_n\psi_n,$$

wobei c_n die Entwicklungskoeffizienten sind.

Die Erwartungswerte hermitischer Operatoren sind gegeben durch

$$\langle A\rangle = \langle\Psi|A|\Psi\rangle.$$

Kommutieren zwei hermitische Opreratoren A und B nicht, so ist das Produkt der Unschärfen der beiden Erwartungswerte

$$\triangle A\triangle B \geq \frac{1}{2}|\langle[A,B]\rangle|.$$

Dieses ist die allgemeine Unschärferelation.

1.2 Konventionelle Interpretation der Quantenmechanik

Nach der Interpretation der Quantenmechanik, wie sie heute meist verwendet wird, wird der Zustand eines quantenmechanischen Systems vollständig durch seine Wellenfunktion beschrieben. Die Wellenfunktion bestimmt die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\rho(\boldsymbol{x},t)\mathrm{d}^3\mathrm{x} = |\Psi(\boldsymbol{x},t)|^2\mathrm{d}^3\mathrm{x}.$$

Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Teilchen bei z.B. einer „Ortsmessung“ im Volumenelement $\mathrm{d}^3\mathrm{x}$ am Ort $\boldsymbol{x}$ zu finden ist. Für die Wahrscheinlichkeitsdichte gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}|\Psi(\boldsymbol{x},t)|^2 + \nabla \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = 0.$$

Dabei ist $\boldsymbol{j}$ die Wahrscheinlichkeitsstromdichte, welche durch

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t) = \frac{\hbar}{m}\Im\big(\Psi^*(\boldsymbol{x},t)\nabla\Psi(\boldsymbol{x},t)\big)$$

gegeben ist.

Die Messgrößen der klassischen Physik werden Observablen genannt. Diese Observablen werden durch hermitische Operatoren dargestellt. Die möglichen Messwerte einer Observable A sind deren Eigenwerte a_n. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Wert a_n gemessen wird, ist $|c_n|^2$. Wenn bei Messung der Observable A der Wert a_n gefunden wird, kollabiert die Wellenfunktion Ψ zu der Eigenfunktion ψ_n. Der Zustand des Systems fällt in einen Eigenzustand entsprechend ψ_n.

Aus der allgemeinen Unschärferelation wird gefolgert, dass die Observablen zu zwei nicht kommutierenden, hermitischen Operatoren nicht definiert sind. Das Unschärfeprodukt ihrer Erwartungswerte ist immer grösser als ein bestimmter Wert. Zum Beispiel sind Orts- und Impulsoperatoren nicht kommutativ und es gilt

$$\triangle x \triangle p \geq \frac{1}{2}\hbar.$$

Die Unschärfe eines quantenmechanischen Systems gilt als fundamental und nicht als Problem ungenauer Messung. Ort und Impuls (oder zwei andere nicht kommutierende Observablen) eines Systems haben nie gleichzeitig scharfe Werte. Es ergibt sich nur eine statistische Verteilung für diese Observablen.

1.3 Historische Entwicklung

1.3.1 Bohr und Heisenberg

Die fundamentale Unschärferelation der konventionellen Interpretation beruht auf der von Bohr postulierten Unteilbarkeit des Wirkungsquantums und der Unbestimmbarkeit und Unkontrollierbarkeit der Wechselwirkung des Beobachters mit dem Beobachteten. Diese Postulate implizieren, dass es nicht möglich ist, den Beobachter (bzw. den Messapparat) von dem beobachteten System zu trennen. Beides zusammen bildet das Quantenphänomen. Die Beobachtung einer anderen Größe des Systems ergibt ein anderes Phänomen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich die Unschärferelation von Heisenberg als fundamentaler Bestandteil eines Quantenphänomens. Exakte Zustände (z.B. Orte und Impulse) eines Systems haben keine Bedeutung auf der Quantenebene. Die einzigen Aussagen, die man über ein System machen kann, sind statistischer Natur. Man kann bestimmen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein System in einem seiner möglichen Zustände ist. Das bedeutet aber auch, dass ein System in einer Überlagerung mehrerer Möglichkeiten sein kann. Zum Beispiel ist ein Objekt mit Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei Ort a und einer anderen bei Ort b jeweils zu einem bestimmten Prozentsatz an beiden Orten.

Diese Überlagerung von möglichen „Zuständen" des Quantenphänomens ist ein Grund für Kritik an der Interpretation von Bohr. Ein quantenmechanisches System kann eine makroskopische Größe beeinflussen. Es müsste sich die Überlagerung der Zuständeauf die makroskopische Größe übertragen und somit für uns sichtbar sein. Dieses ist jedoch nicht der Fall.

Beispiele hierfür sind Schrödingers Katze und der α-Zerfall. „Schrödingers Katze" ist ein Gedankenexperiment, bei dem eine Katze in einer Überlagerung von Lebend und Tot sein soll, beeinflusst durch die Überlagerung von „Zerfall" und „Nicht-Zerfall" eines α-Teilchens.

Der α-Zerfall selbst kann exakt gemessen werden. Nach der Theorie von Gamow zerfällt ein Atomkern, wenn ein α-Teilchen mit Hilfe des Tunneleffektes das Coulomb-Potential des Kernes durchdringt. Die Wellenfunktion des Teilchens in dem Potential wird durch die Zeitentwicklung breiter und läuft aus dem Potential heraus.

Nach Bohrs Interpretation gibt der Teil der Wellenfunktion, der außerhalb des Potentials ist, die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das Atom zerfallen ist. Diese Wahrscheinlichkeit steigt langsam mit der Zeit an. Das α-Teilchen ist in einer Überlagerung aus „innerhalb" und „außerhalb" des Kernes.

Der Zeitpunkt des Zerfalls eines einzelnen Atoms kann experimentell genau bestimmt werden. Wir sehen aber nicht, dass das α-Teilchen langsam aus dem Kern kommt, sondern dass es „plötzlich" außerhalb des Kerns ist. Die einzige Ungewissheit die besteht ist, dass wir nicht vorherbestimmen können, wann das Atom zerfällt.

Das Problem der Unbestimmbarkeit liegt darin, dass wir keine genauen Anfangsbedingungen kennen. Nach Bohr sind diese Anfangsbedingungen zufällig und nicht durch genauere Messmethoden oder andere Theorien zu bestimmen. Die Ungewissheit über die Anfangsbedingungen und damit über den exakten Verlauf des Systems ist eine fundamentale Eigenschaft des quantenmechanischen Systems.

Nach Einsteins Meinung gibt es diesen fundamentalen Zufall nicht. Es muss eine zusätzliche Beschreibung der Quantenphänomene geben, mit der auch die Anfangsbedingungen festgelegt werden können.

1.3.2 Von Neumann

Einsteins Forderung nach einer Erweiterung zur Quantenmechanik, die die Anfangsbedingungen eines Systems beschreibt und damit den fundamentalen Zufall „behebt", wird durch von Neumann zunichte gemacht. Er bewies, dass die Quantenmechanik mit ihren Axiomen eine vollständige Theorie ist. Es kann kann also keine Zusätze zur Theorie (wie z.B. „versteckte Variablen") geben.

Um zu klären, wieso makroskopisch keine Überlagerungszustände beobachtet werden, entwickelte von Neumann die Theorie der Messung. Der Zustand eines Systems, der, nach Bohr, eine Überlagerung der verschiedenen Möglichkeiten darstellt, kollabiert bei einer Messung in einen Zustand, der nur eine der erwarteten Möglichkeiten darstellt.

Zur mathematischen Beschreibung wurde das Konzept der hermitischen Operatoren als Darstellung der Messgrößen (Observablen) eingeführt.

Um den Messprozess so beschreiben zu können, muss man makroskopische und Quantenebene trennen. Bei einer Messung wechselwirken diese Ebenen. Diese Wechselwirkung erzeugt auf der klassischen Ebene ein messbares Ergebnis. Auf der quantenmechanischen Ebene wird bewirkt, dass die Wellenfunktion sich von Ψ zu ψ_n kollabiert.

Obwohl die Trennung der klassischen und Quanten-Ebene nur abstrakt ist, ist nicht klar wo die Grenze zwischen diesen Ebenen ist. Ein Messapparat kann als quantenmechanisches System beschrieben werden und somit mit dem eigentlichen Quantensystem zusammen als neues Gesamtsystem betrachtet werden. Dieses neue System kann dann gemessen werden, so dass der Kollaps erst bei dieser Messung passiert.

Es ist nicht klar, was eigentlich eine Messung ist, bzw. wann sie stattfindet.

1.4 Bohmsche Mechanik

Theorien, bzw. Interpretationen der Quantenmechanik, die ohne Messung und fundamentalen Zufall auskommen, sind zum Beispiel „Decoherent Histories“, „Spontane Lokalisation“ und „pilot-wave“-Theorien. In diesen Theorien kann der Messprozess durch fundamentalere Konzepte beschrieben werden.

Hier soll nur die Bohmsche Mechanik (eine „pilot-wave“-Theorie) betrachtet werden, die von David Bohm 1952 als „Hidden Variable Theory“ [1] vorgestellt wurde.

In der Bohmschen Mechanik wird ein quantenmechanisches Phänomen vollständig durch seine Wellenfunktion und lokale Geschwindigkeiten beschrieben. Die Bewegung von Teilchen ist durch die Form der Wellenfunktion gegeben.

Bohmsche Mechanik ist eine deterministische Teilcheninterpretation. Es existiert eine physikalische Realität, unabhängig vom Beobachter. Fundamentaler Zufall tritt nicht auf. Teilchen haben Anfangswerte und die Bahnen dieser Teilchen sind explizit gegeben.

Alle Vorhersagen der (nicht-relativistischen) konventionellen Quantenmechanik, und damit auch alle dadurch erklärbaren experimentellen Ergebnisse, werden durch die Bohmsche Mechanik reproduziert. Der statistische Charakter der Vorhersagen der Quantenmechanik kommt durch die Betrachtung eines gedachten Ensembles von Teilchen derselben Wellenfunktion aber mit verschiedenen Anfangsorten zustande, wobei die Teilchendichte zum Zeitpunkt null $\rho(x,0) = |\Psi(x,0)|^2$ entspricht.

Häufig genannte Argumente gegen die Bohmsche Mechanik und „hidden variable“-Theorien im allgemeinen sind von Neumanns Beweis und die Bellschen Ungleichungen.

Nach von Neumann ist Quantenmechanik eine vollständige axiomatische Theorie und darf nicht durch eine zusätzliche Bedingung erweitert werden. Die Bohmsche Mechanik ist jedoch um eine lokale Geschwindigkeit erweitert. Dafür ist das Statistische Theorem nicht mehr axiomatisch enthalten. Es gilt nicht zwangsläufig, dass $|\Psi|^2$ die Wahrscheinlichkeitsdichte ist. Von Neumanns Beweis ist deshalb kein Argument gegen die Bohmsche Mechanik.

Die Bellschen Ungleichungen stellen eine Bedingung an die Ergebnisse von Experimenten des EPR-Typs. Erfüllen die Ergebnisse diese Ungleichungen, so kann das Experiment durch eine lokale „hidden-variable“-Theorie beschrieben werden. Es wurde experimentell gezeigt (z.B. Aspect et al.), dass die Bellschen Ungleichungen nicht erfüllt sind [3].

Die Ergebnisse werden oft so gedeutet, dass die Bellschen Ungleichungen „hidden-variable“ Theorien ausschließen, da Lokalität für eine Theorie gefordert sei. Bohmsche Mechanik erfülle die Bellschen Ungleichungen nur, weil sie nichtlokal sei. Sie sei aber damit „unwürdig“ physikalische Theorie zu sein. Das ist falsch [4]. Die Bellschen Ungleichungen zeigen, dass Bohmsche Mechanik die Realität richtig beschreiben kann, weil sie nichtlokal ist.

1.4.1 Grundgleichungen der Bohmschen Mechanik

Die Bewegung der Teilchen wird in der Bohmschen Mechanik durch die Schrödinger-Gleichung und eine „Führungsgleichung“ (*guidance-formula*)

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \frac{\hbar}{m} \Im \left(\frac{\nabla\Psi\big(\boldsymbol{r}(t),t\big)}{\Psi\big(\boldsymbol{r}(t),t\big)} \right)$$

beschrieben. Die Führungsgleichung gibt die lokale Geschwindigkeit des Teilchens an. Durch diese Gleichungen ist die Bewegung eines Teilchens vollständig festgelegt, wenn $\Psi(t=0)$ und $\boldsymbol{r}(t=0)$ gegeben ist.

Ein Mehrteilchensystem wird durch die Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)$, die Lösung der Schrödinger-Gleichung für das Mehrteilchensystem ist, beschrieben. Die lokalen Geschwindigkeiten der N Teilchen sind gegeben durch

$$\dot{\boldsymbol{r}}_k(t) = \frac{\hbar}{m_k} \Im \left(\frac{\nabla_k\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)}{\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)} \right) \; ; \; k = 1 \ldots N.$$

Die Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_N, t)$ ist eine Funktion aller Teilchenorte. Die Bewegung eines einzelnen Teilchens hängt damit von allen Teilchenorten ab. Dieses führt zu dem nichtlokalen Charakter der Quantenphänomene.

1.4.2 Herleitung der Führungsgleichung

Nach Bohm

Der ursprüngliche Ansatz von David Bohm [1] liefert zwei Differentialgleichungen (siehe A.1)

$$\frac{\partial}{\partial t} R^2 + \nabla \left(R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) = 0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} S + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(\boldsymbol{x}) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0. \tag{1.2}$$

Diese Gleichungen sind Imaginärteil Gl.(1.1) und Realteil Gl.(1.2) der Schrödinger-Gleichung, wobei die Wellenfunktion in Polarform

$$\Psi = R \, \exp \left\{ \frac{\mathrm{i}}{\hbar} S \right\}$$

geschrieben wurde, mit $R = R(\boldsymbol{x}, t)$ und $S = `S(\boldsymbol{x}, t)$.

Gleichung (1.1) hat die Form einer Kontinuitätsgleichung. Gleichung (1.2) hat die Form der klassischen Hamilton-Jacobi Gleichung, modifiziert durch einen zusätzlichen potentialartigen Term

$$\mathcal{Q} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R}.$$

Dieser Term wurde von Bohm „Quantenpotential" genannt. Er ist im klassischen Grenzfall vernachlässigbar und Gleichung (1.2) ist eine Hamilton-Jacobi Gleichung des klassischen Systems. Die Phase $S()$ der Wellenfunktion lässt sich als Wirkungsfunktion identifizieren und die Geschwindigkeit des Teilchens wird durch den Gradienten der Phase S beschrieben.

Ist das Quantenpotential nicht vernachlässigbar, ist die Geschwindigkeit des Teilchens immer noch durch

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\nabla S.$$

gegeben. Die Bewegung wird jedoch durch das zusätzliche Potential $\mathcal{Q}$ beeinflusst.

Da $R^2 \equiv |\Psi|^2$, ist es nahe liegend Gleichung (1.1) mit der Kontinuitätsgleichung der konventionellen Quantenmechanik für die Wahrscheinlichkeitsdichte zu vergleichen (siehe Kapitel 1.2).

Interpretiert man $|\Psi|^2$ als Teilchendichte, so drückt die Kontinuitätsgleichung die Teilchenerhaltung aus. Somit wird die Stromdichte (Wahrscheinlichkeitsstromdichte der konventionellen QM)

$$\boldsymbol{j} = \frac{\hbar}{m}\Im(\Psi^*\nabla\Psi)$$

zu einer Teilchenstomdichte. Es liegt nahe $\boldsymbol{j}$ als Produkt aus Teilchendichte und einem Geschwindigkeitsfeld aufzufassen

$$\boldsymbol{j} = |\Psi|^2\boldsymbol{v}.$$

Der Strom hat somit die Form des entsprechenden Terms der Gleichung (1.1). Es wird nun postuliert, dass bei gegebener Wellenfunktion (und damit festgelegter Stromdichte), die Bewegung des entsprechenden Teilchens gegeben ist durch

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{j}}{|\Psi|^2} = \frac{\hbar}{m}\Im\left(\frac{\Psi^*\nabla\Psi}{|\Psi|^2}\right).$$

Es kann leicht gezeigt werden, dass

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{j}}{|\Psi|^2} = \frac{\nabla S}{m}$$

ist. (siehe A.2).

Nach Dürr

Es gibt eine andere Möglichkeit, die Gleichungen der Bohmschen Mechanik herzuleiten. Sie wurde von Detlef Dürr vorgestellt [4]. Diese Herleitung setzt eine Wellenfunktion als Lösung der Schrödinger-Gleichung nicht voraus.

Betrachtet werden Teilchen, die nur durch ihre Koordinatenkonfiguration $\boldsymbol{Q}$ beschrieben werden. Die einfachste Beschreibung der Bewegung der Teilchen ist durch die erste zeitliche Ableitung der Konfiguration

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{Q}, t)$$

gegeben. Diese Vorschrift für die Bewegung muss galilei-invariant sein. Rotationsinvarianz impliziert, dass die Geschwindigkeit Gradient einer skalaren Funktion ist: $\boldsymbol{v} \sim \nabla\psi$. Zeitumkehr soll mit komplexer Konjugation einhergehen:

$$\begin{aligned} & t \to -t \\ \Rightarrow \qquad & \psi(\boldsymbol{q}, t) \to \psi^*(\boldsymbol{q}, -t). \end{aligned}$$

Die Geschwindigkeit wird dann durch den Imaginärteil

$$v \sim \Im(\nabla\psi)$$

beschrieben.

Für die Transformation $\boldsymbol{v} \to \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ gilt

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}' \\ &\alpha\,\Im\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right) + \boldsymbol{u} = \alpha\,\Im\left(\frac{\nabla'\psi'}{\psi'}\right). \end{aligned}$$

Diese Bedingung impliziert, dass $\psi' = \exp\{\mathrm{i}\frac{1}{\alpha}\boldsymbol{q}'u\}\psi$ eine projektive Größe ist und die Geschwindigkeit die Form

$$\boldsymbol{v} = \alpha\,\Im\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right)$$

hat.

Zusätzlich wird ein galileiinvariantes Gesetz benötigt, dass die skalare Funktion ψ beschreibt.

Da ψ sich unter Zeitumkehr „seltsam“ verhält, ist anzunehmen, dass die Funktion einer Dynamik gehorcht. Deshalb ist es sinnvoll als einfaches Gesetz eine Wellenfunktion

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}\psi = \frac{\alpha}{2}\triangle\psi$$

anzusetzten. Die Variable α wird durch die Forderung, dass sich der Newtonsche Grenzfall ergeben muss, über die Hamilton-Jacobi Theorie als

$$\alpha = \frac{\hbar^2}{m}$$

identifiziert.

Somit ist die Wellengleichung zur Beschreibung von ψ die Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\frac{d}{dt}\psi = \frac{\hbar}{2m}\triangle\psi.$$

Die Geschwindigkeit ist

$$\boldsymbol{v} = \frac{\hbar}{m}\,\Im\left(\frac{\nabla\psi}{\psi}\right).$$

1.5 Quantenpotential

Die Bedeutung des Quantenpotentials

$$\mathcal{Q} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}$$

für die Bewegung eines Teilchens ist dieselbe, wie in der klassischen Mechanik.Da S formal eine klassische Wirkungsfunktion für die Hamilton-Jacobi Gleichung mit dem Gesamtpotential $V_{\mathrm{ges}} = V + \mathcal{Q}$ darstellt, kann man die Newtonsche Bewegungsgleichung folgern. Die Kraft auf das Teilchen ist der negative Gradient des Gesamtpotentials:

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = -\nabla V_{\mathrm{ges}} = -\nabla V - \nabla\mathcal{Q}.$$

Im Übergang zur klassischen Mechanik wird $\mathcal{Q} \ll V$ und quantenmechanische Effekte bei der Bewegung eines Teilchens sind zu vernachlässigen.

Das Quantenpotential unterscheidet sich von einem klassischen Potential dadurch, dass zu der Bewegung eines Teilchens in einem klassischen Potential unterschiedliche Quantenpotentiale gehören können, abhängig von der vorliegenden Wellenfunktion. Da außerdem der Betrag der Wellenfunktion an jedem Ort im Raum von der Form des klassischen Potentials im ganzen Raum abhängen kann, gilt dies auch für das Quantenpotential.

Eine wichtige Eigenschaft des Quantenpotentials ist, dass es nur von der Form, aber nicht von der Amplitude der Wellenfunktion abhängt. Das bedeutet, dass $\mathcal{Q}$ nicht klein sein muss, wenn $|\Psi|^2$ klein ist.

1.6 De Broglies Ansatz einer relativistischen Führungsgleichung

De Broglie leitete eine relativistische Führungsgleichung für Bosonen her [2]. Sie basiert auf Wellenfunktionen die Lösungen der Klein-Gordon Gleichung sind.

Die Herleitung der Führungsgleichung ist analog zur Herleitung der klassischen Bohmschen Quantenmechanik, jedoch ist zu beachten, dass man nun mit Vierer-Vektoren arbeiten muss.

Die folgenden Konventionen werden in der Herleitung verwendet (wie z.B. in [6]): Die Minkowski-Metrik ist $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(1, -1, -1, -1)$. Außerdem wird $\hbar = c = 1$ gesetzt. Wir verwenden grichische Indizes für Vierer-Vektor und lateinische Indizes fr Dreier-Vekoren.

Die Klein-Gordon-Gleichung für ein einzelnes Teilchen mit Ruhemasse m_0 und Ladung e ist

$$(\mathrm{i}\partial_\mu - eA_\mu)(\mathrm{i}\partial^\mu - eA^\mu)\Psi = m_0^2\Psi.$$

A_μ ist das äußere elektromagnetische Feld.

Setzt man in diese Gleichung die Wellenfunktion $\Psi = R\exp(iS)$ ein und separiert nach Imaginär- und Realteil, so erhält man zwei reelle Gleichungen (siehe A.3)

$$(\partial_\mu S + eA_\mu)(\partial^\mu S + eA^\mu) = {m_0}^2(1 + \mathcal{Q}) \tag{1.3}$$

und

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{1.4}$$

Hierbei ist

$$j^\mu = -\frac{R^2}{m_0}(\partial^\mu S + eA^\mu)$$

und

$$\mathcal{Q} = \frac{\partial_\mu \partial^\mu R}{R\, m_0^2}. \tag{1.5}$$

Gleichung (1.3) hat die Form einer klassisch relativistischen Hamilton-Jacobi Gleichung für ein Teilchen mit äußerem elektromagnetischen Feld

$$(\partial_\mu S + eA_\mu)(\partial^\mu S + eA^\mu) = {m_0}^2$$

in der der Vierer-Impuls als Vierer-Gradient der Wirkungsfunktion S

$$p^\mu = \partial^\mu S + eA^\mu$$

gegeben ist.

Der Unterschied besteht darin, dass der zusätzliche Term $\mathcal{Q}$ auftaucht. Dieser Term ist dem nicht-relativistischen Quantenpotential ähnlich, jedoch wird er dem Masseterm der Gleichung zugeordnet und beschreibt damit eine (geschwindigkeitsabhängige) „Korrektur“ der Ruhemasse.

Gleichung (1.4) ist die Kontinuitätsgleichung für den Vierer-Strom j^μ. Die räumlichen Komponenten des Stroms können (in Analogie zum nicht-relativistischen $\boldsymbol{j}$) als Teilchenstromdichte und die zeitliche Komponente kann als Energie- oder Ladungsstromdichte interpretiert werden.

Die Vierer-Geschwindigkeit wird, über den Vierer-Impuls, durch die Beziehung

$$M_0 v^\mu = p^\mu = (\partial^\mu S + eA^\mu)$$

definiert. M_0 ist die quantenkorrigierte „Ruhemasse“

$$M_0 = m_0\sqrt{1+\mathcal{Q}}.$$

Ohne äußeres elektro-magnetisches Feld ist die Geschwindigkeit durch

$$M_0 v^\mu = \partial^\mu S$$

gegeben.

1.7 Überlegungen zu de Broglies Führungsgleichung

Es wurde oft kritisiert, dass die variable Ruhemasse nicht immer reell ist [6], [7]. Dadurch ist v^μ nicht generell gegeben. Ein weiteres Problem ist, dass der Strom j^μ und damit die Geschwindigkeit nicht immer zeitartig und zukunftsgerichtet ist. Die Zeitrichtung der Raum-Zeit-Bahnen kann sich unter bestimmten Bedingungen umkehren, wie in dem Beispiel in Kapitel 2.2.1 demonstriert wird.

Im Folgenden betrachten wir wechselwirkungsfreie Teilchen ohne äußeres elektromagnetisches Feld, $A^\mu = 0$.

Die Dreier-Geschwindigkeit berechnet sich als Quotient aus Impuls und Energie. Die Komponenten der Dreier-Geschwindigkeit sind

$$v^i = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{\partial_\tau x}{\partial_\tau t} = \frac{p^k}{p^0} = \frac{\partial^k S}{-\partial^0 S} \tag{1.6}$$

Die „variable Ruhemasse“ wird nicht benötigt um v^i zu bestimmen. Die Dreier-Geschwindigkeit ist immer reell, auch wenn M_0 imaginär ist.

Die relativistisch korrigierte Masse (inklusive Quantenkorrektur) ist

$$M^* = \frac{M_0}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{m_0\sqrt{1+\mathcal{Q}}}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{1.7}$$

Der Dreier-Impuls kann aus der Dreier-Geschwindigkeit berechnet werden und ist mit dieser über M^* verbunden. Für die i-te Komponente des Impulses gilt

$$p^i \quad = \quad \partial^i S = \sqrt{\frac{\partial^\mu S \partial_\mu S}{\partial^\mu S \partial_\mu S}\partial^i S \partial_i S}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\partial^\mu S \partial_\mu S \; \partial^i S \partial_i S}{1 - \frac{\partial^k S \partial_k S}{\partial^0 S \partial_0 S} \; \partial^0 S \partial_0 S}} \\
&= \sqrt{\frac{{M_0}^2}{1 - v^2} \; \left(\frac{\partial^i S}{\partial_0 S}\right)^2} \\
p^i &= M^* v^i .
\end{aligned}
$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$
(\boldsymbol{v})^2 = (\sum_k v^k)^2 = v^k v_k = \frac{\partial^k S}{\partial_0 S} \frac{\partial_k S}{\partial_0 S}
$$

und dass auf Grund der Minkowski Metrik die kovariante und kontravariante Ableitung nach der nullten Komponente identisch sind und vertauscht werden können.

Der Dreier-Impuls wird durch die Masse M^*, die die „variable“ Ruhemasse beinhaltet, bestimmt. Es ist zu prüfen, wie sich Impuls und damit die Energie des Teilchens, gegeben durch

$$
E = \sqrt{{M_0}^2 c^4 + p^2 c^2} = M^* c^2 ,
$$

verhalten, wenn die „variable“ Ruhemasse imaginär wird.

Entfernt sich ein Teilchen mit $v > c$ vom Beobachter, ist die Geschwindigkeit des Teilchens raumartig. Die Komponenten der Vierer-Geschwindigkeit sind imaginär. Setzt man die de Broglie Definition der Vierer-Geschwindigkeit

$$
v^\mu = \frac{p^\mu}{M_0} = \frac{\partial^\mu S}{M_0}
$$

an, so erkennt man, dass M_0 bei $v > c$ imaginär werden muss, denn der Impuls ist als Vierer-Gradient einer rein reellen Funktion definiert. Außerdem muss $M_0 = 0$ sein, wenn $v = c$ ist. Die Komponenten von v^μ sind auf Grund des Faktors $1/\sqrt{1-v^2}$ reell bei $v < c$, imaginär bei $v > c$ und unendlich bei $v = c$.

Man kann zeigen, dass $M_0/\sqrt{1-v^2}$ immer reell ist:

$$
\frac{M_0}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{\frac{{m_0}^2(1+Q)}{1-v^2}} = \sqrt{\frac{\partial_\mu S \partial^\mu S}{1 - \frac{\partial_k S \partial_k S}{\partial^0 S \partial_0 S}}}
$$

$$
\sqrt{\frac{\partial_0 S \partial^0 S - \partial_k S \partial^k S}{1 - \frac{\partial_k S \partial^k S}{\partial_0 S \partial^0 S}}} = \sqrt{\frac{\partial_0 S \partial^0 S - \partial_k S \partial^k S}{\partial_0 S \partial^0 S - \partial_k S \partial^k S} \cdot \partial_0 S \partial^0 S}
$$

$$
\Rightarrow \; M^* \; = \; \frac{M_0}{\sqrt{1-v^2}} \; = \; \partial^0 S .
$$

Zu dieser Relation kommen wir auch auf diesem Weg:

$$
\frac{M_0}{\sqrt{1-v^2}} = M_0 u^0 = p^0 = \partial^0 S .
$$

Die relativistische Masse M^* ist also durch $\partial^0 S$ gegeben. $S(\boldsymbol{x}, t)$ und somit auch $\partial^0 S$ ist eine rein reelle Funktion. Damit ist gezeigt, dass M^* immer reell ist. Der Dreier-Impuls und die Energie sind immer reell, auch wenn sich das Teilchen raumartig bewegt.

Die Quantenkorrektur der Ruhemasse bewirkt, dass ein quantenmechanisches Teilchen sich auch raumartig bewegen kann, ohne eine imaginäre Energie anzunehmen. Die Bahnen sind überlichtschnell, wenn $\mathcal{Q}$ negativ ist.

Diese Theorie enthält bisher weder Wechselwirkung mit weiteren Teilchen noch die Messung des Systems durch einen Beobachter. Trotz der raumartigen Bahnen wird nichts mit Überlichtgeschwindigkeit beeinflusst. Die Kausalität wird nicht verletzt.

Eine Messung des quantenmechanischen Systems verändert dieses. Die Bahnen des Teilchens nach der Messung entsprechen nicht den vorausgesagten Bahnen des Systems, bevor es gemessen wurde. Um dieses Problem zu umgehen, kann man das System so „unscharf“ messen, dass es nicht gestört wird. Anstatt einer einzelnen Bahn, betrachtet man ein Ensemble von möglichen Bahnen. Man erhält so statistische Aussagen über die Bewegung des Teilchens. Die Verteilung der Teilchenorte entspricht dabei der Teilchendichte $\rho = |\Psi|^2$. Die durch eine solche Messung erhaltenen Aussagen über das Verhalten der Teilchen entsprechen den Erwartungswerten der konventionellen Quantenmechanik. In diesem Sinne ist die Bewegung des Teilchens kausal.

Wie der Messprozess der konventionellen Quantenmechanik in der nicht-relativistischen Bohmeschen Quantenmechanik dargestellt ist, wird in [4] geklärt.

Die Zeitkomponente des Stroms j^0 und damit v^0 ist nicht immer positiv. Die Bahn eines Teilchens verläuft nicht zwangsläufig in die Zukunft. Die Zeitrichtung kann sich umkehren. Luis de Broglie [2] kommentierte dieses Verhalten mit einem Verweis auf die Interpretation von Feynman, in der ein Anti-Teilchen, also ein Teilchen mit negativer Energie, als ein Teilchen mit positiver Energie, das in negative Zeitrichtung läuft, interpretiert wird.

Wir interpretieren eine Bahn, die in negativer Zeitrichtung verläuft, als die in positiver Zeitrichtung verlaufende Bahn eines Antiteilchens. Eine geschlossene Raum-Zeitbahn (Loop) interpretieren wir als die Bahn eines virtuellen Teilchen-Antiteilchen-Paares.

Kapitel 2

Beispiele und Simulationen

In diesem Kapitel werden wir einfache quantenmechanische Systeme untersuchen. Im ersten Abschnitt betrachten wir nicht-relativistische Beispiele, an denen wir die Grundlagen der Bohmschen Mechanik verdeutlichen wollen. Im zweiten Abschnitt wenden wir die Theorie von de Broglie auf relativistische Beispiele an.

Es erweist sich als vorteilhaft, für die Berechnungen ein Einheitensystem, in dem $\hbar = c = \mathrm{eV} = 1$ ist, zu wählen.

Zeit, Längen und Massen werden in den Abgeleiteten Einheiten gemessen. Wir erhalten die Zeiteinheit

$$1\,\mathrm{ZE} = \frac{\hbar}{\mathrm{eV}} = 0.653 * 10^{-15}\mathrm{s},$$

die Längeneinheit

$$1\,\mathrm{LE} = \frac{\hbar\, c}{\mathrm{eV}} = 1.959 * 10^{-7}\mathrm{m}$$

und die Masseneinheit

$$1\,\mathrm{ME} = \frac{\mathrm{eV}}{c^2} = 0.534 * 10^{-27}\mathrm{kg}.$$

Wir beschränken uns auf die Betrachtung der Beispiele in einer Raum-Dimension. Außerdem wählen wir die Masse der betrachteten „Testteilchen“ $m = 1$ ME.

2.1 Nicht-relativistische Beispiele

2.1.1 Ein Teilchen in einem Kastenpotential

Anhand des folgenden Beispiels verdeutlichen wir, wie die Geschwindigkeiten berechnet werden, wenn die Wellenfunktion eine Überlagerung von Eigenfunktionen ist. Außerdem zeigen wir, dass sich aus der Betrachtung eines Ensembles der möglichen Bahnen die Erwartungswerte der konventionellen Quantenmechanik ergeben. Ferner diskutieren wir die „Unschärfen“ für Ort und Impuls, die sich aufgrund der Betrachtung des Ensembles ergeben.

Das System, das wir betrachten, beschreibt ein einzelnes „Testteilchen“ in einem Kastenpotential der Form

$$V = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} .$$

Die Wellenfunktion des Systems ist durch Überlagerung von Eigenfunktionen gegeben. Die entsprechenden Energie-Eigenfunktionen lauten

$$\psi_n = A\,\sin(kx)\,\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t\right\},$$

mit

$$\begin{aligned} k &= n\pi/L \\ A &= \sqrt{2/L} \\ E &= \hbar/2m(\pi/L)^2 n^2. \end{aligned}$$

Der allgemeine Zustand des Systems ist

$$\Psi = \sum_n c_n \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}\,n^2 t\right\}.$$

Ist das „Testteilchen“ in einem Eigenzustand, ist die Phase direkt abzulesen und die Geschwindigkeit ist

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{m}\nabla S = \nabla\left(\frac{\pi^2}{2mL^2}n^2\right) = 0.$$

Das Teilchen bewegt sich nicht.

Für ein Teilchen, dessen Wellenfunktion in einem Zustand der Überlagerung von zwei oder mehr Eigenfunktionen ist, ist die Geschwindigkeit als Gradient der Gesamtphase $\nabla S_{\mathrm{total}}$ gegeben. Die Gesamtphase kann über $\arctan(\Re(\Psi)/\Im(\Psi))$ bestimmt werden. Der Gradient der Phase kann aber auch als $\nabla S_{\mathrm{total}} = \Im(\nabla\Psi/\Psi)$ berechnet werden.

Sind die Eigenfunktionen, wie in diesem Beispiel, in Polarform

$$\psi = R_j \exp\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}S_j\}$$

gegeben, ist $\nabla S_{\mathrm{total}}$ einer Wellenfunktion aus beliebigen Überlagerungen

$$\nabla S_{total} = \frac{\sum_{n,m}(R_n R_m \nabla S_n)\cos(S_n - S_m) - (R_n \nabla R_m - R_m \nabla R_n)\sin(S_n - S_m)}{\sum_{n,m}\; R_n R_m \cos(S_n - S_m)}$$

(Herleitung siehe Anhang A.4).

Für zwei überlagerte Eigenfunktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} \nabla S_{total} &= \left(\frac{R_1^2\nabla S_1 + R_2^2\nabla S_2 - (R_1\nabla R_2 - R_2\nabla R_1)\sin(S_1 - S_2)}{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos(S_1 - S_2)}\right. \\ &+ \left.\frac{(R_1R_2\nabla S_2 + R_1R_2\nabla S_1)\cos(S_1 - S_2)}{R_1^2 + R_2^2 + 2R_1R_2\cos(S_1 - S_2)}\right). \end{aligned}$$

Zur Simulation der Teilchenbewegung ist die allgemeine Summe implementiert. Die einzelnen Terme der Eigenfunktionen $R, S, \nabla R, \nabla S$ geben wir entsprechend des betrachteten Systems direkt an. Die so berechneten Geschwindigkeiten werden mit dem Runge-Kutta Verfahren 4. Ordnung integriert.

Im Folgenden betrachten wir eine Überlagerung der ersten beiden Eigenfunktionen $(n = 1,\ 2)$

$$\Psi = \sin(\pi x)\exp\left\{\mathrm{i}\,\frac{\pi^2}{2}\,t\right\} + \sin(2\pi x)\exp\left\{\mathrm{i}\,\pi^2\;2t\right\},$$

wobei $L = m = 1$ und $\hbar = 1$ gesetzt ist. Die Gewichtung der beiden Eigenfunktionen sind gleich. In Abb. 2.1 sind mögliche Bahnen dargestellt.

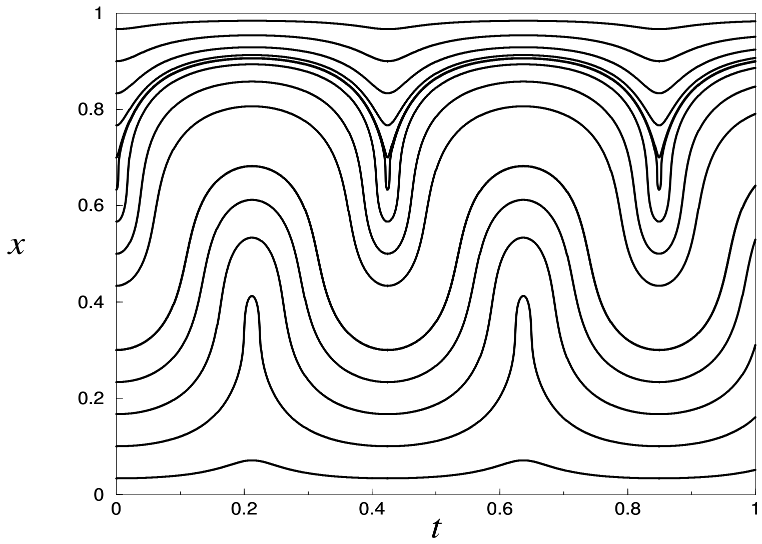

Abbildung 2.1: Bahnen eines „Testteilchens“ in einem Kastenpotential. Die Wellenfunktion des Teilchens ist durch Überlagerung der 1. und 2. Eigenfunktion gegeben.

Betrachten wir nun ein Ensemble von Bahnen, deren Anfangskonfiguration entsprechend der Wellenfunktion gewählt ist. $|\Psi(x, t = 0)|^2$ gibt die Anfangsortsverteilung der „Testteilchen“ an (Abb. 2.2). Die Statistik eines solchen Ensembles soll den Erwartungswerten der konventionellen Quantenmechanik entsprechen.

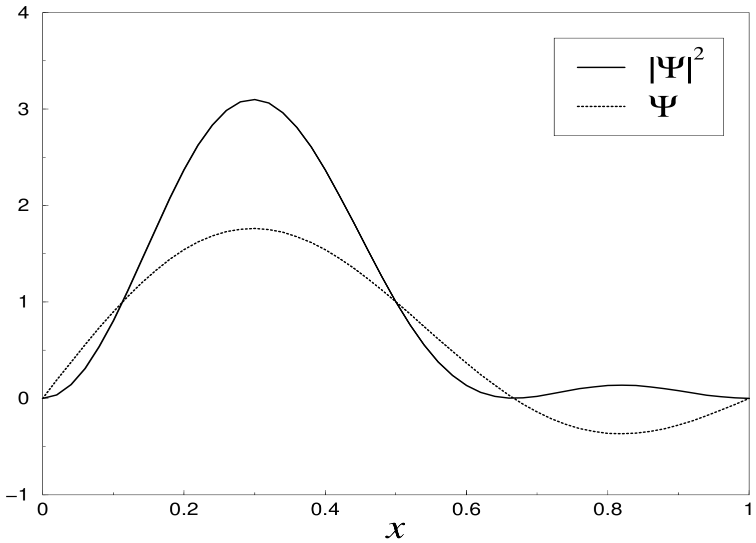

Abbildung 2.2: $\Psi(x, 0)$ und $|\Psi(x, 0)|^2$ für eine Wellenfunktion aus Überlagerung der Eigenfunktionen mit $n = 1, 2$ in einem Kastenpotential

Um das zu überprüfen, berechnen wir zu jedem Zeitpunkt einen Mittelwert der Orte der Bahnen und einen Mittelwert der Geschwindigkeiten der Bahnen. Die so gewonnene mittlere Trajektorie und die mittlere Geschwindigkeit für ein Ensemble von 50000 Bahnen ist in Abb. 2.3 dargestellt. In dieser Abbildung werden die Mittelwerte graphisch mit den konventionellen Erwartungswerten verglichen.

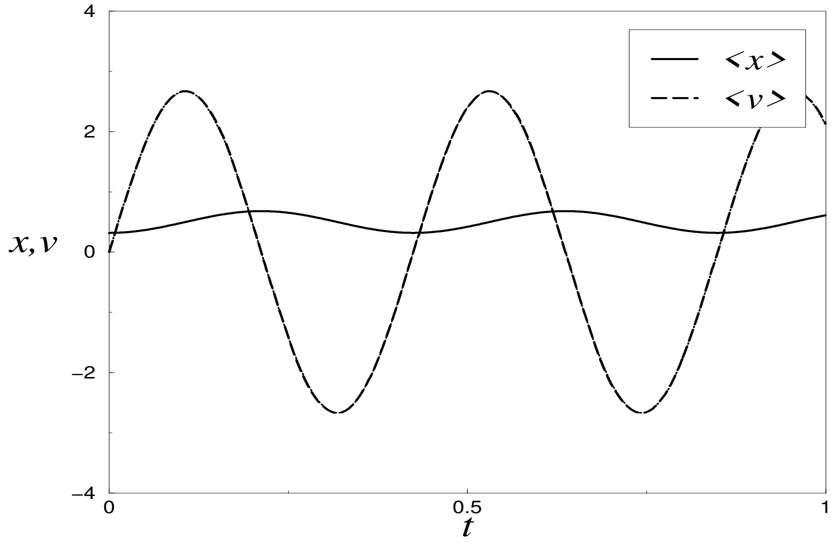

Abbildung 2.3: Orts- und Geschwindikeitsmittelwert im Vergleich mit den konventionellen Erwartungswerten. Diese sind als gepunktete Kurven über die jeweiligen Mittelwerte gelegt.

Der Ortserwartungswert, nach der konventionellen Quantenmechanik berechnet, ist

$$\langle x\rangle = \int_0^L \Psi \mathrm{x} \Psi^* \mathrm{dx} = \frac{1}{2} - \frac{16}{9}\frac{1}{\pi^2}\cos\left(\frac{3}{2}\pi^2\, t\right).$$

Dieser Erwartungswert stimmt mit dem Ortsmittelwert (bis auf numerische Ungenauigkeiten) überein. Auch der konventionelle Geschwindigkeitserwartungswert

$$\langle v\rangle = \int_0^L \Psi(-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}})\Psi^* \mathrm{dx} = \frac{8}{3}\sin(\frac{3}{2}\pi^2\, t)$$

stimmt mit der mittleren Geschwindigkeit überein (Abb. 2.3).

Ein Problem der Bohmschen Quantenmechanik ist, dass die Verteilung der Impulse (bzw. der Geschwindigkeiten) nicht der Wellenfunktion im Impulsraum entspricht, wenn das Ensemble so gewählt ist, dass die Ortsverteilung

$$\rho(x,t) = |\Psi(x,t)|^2$$

ist. In dem betrachteten System sind die Impulse bei $t = 0$ alle exakt null. Eine Fouriertransformation der Ortswellenfunktion in den Impulsraum ergibt aber eine nicht-verschwindende Amplitude der Wellenfunktion. Die Impulse dürften nicht alle gleich sein.

Die Impulse (bzw. Geschwindigkeiten) sind in unserer Berechnung in periodischen Abständen alle gleich, weil die gewählten Eigenfunktionen in periodischen Abständen in Phase sind.

Zwei überlagerte Eigenfunktionen sind mit ihrer Differenzfrequenz in Phase. Ausserdem darf das Verhältnis der Frequenzen kein irrationales Verhältnis sein. Mehr als zwei überlagerte Eigenfunktionen sind nur in Spezialfällen in Phase. Unsere verschwindende Impulsunschärfe tritt also nur in Spezialfällen auf.

Die Orts- und Impuls-„Unschärfen“ des Ensembles werden über die Formel der Standardabweichung

$$\triangle x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2},$$

berechnet, wobei $\langle\ \rangle$ hier den statistischen Mittelwert der Grösse bezeichnet. Diese Abweichungen von den Mittelwerten entsprechen aber nicht den konventionellen Unschärfen. In einem System von überlagerten Eigenfunktionen, die zu $t = 0$ in Phase sind, ist die Impulsunschärfe in periodischen Abständen null (Abb. 2.4).

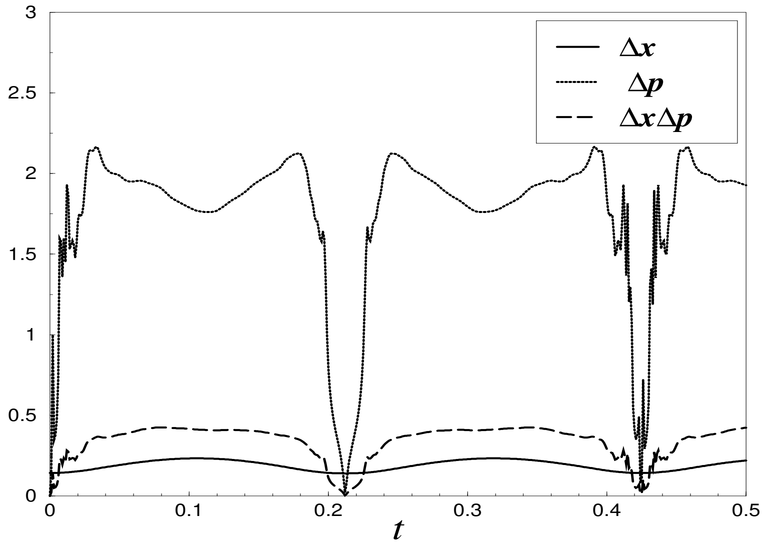

Abbildung 2.4: Orts- und Impulsunschärfe für das System mit zwei überlagerten Eigenfunkionen. Eigenfunktionen sind in Phase für $t = 0$.

Betrachtet man Überlagerungen von mehr als zwei Eigenfunktionen, die nicht in Phase sind, ist die Impulsunschärfe immer größer als null. Jedoch ist die gesamte Unschärfe $\Delta x \Delta p$ nicht konstant und größer als 0.5, wie sie nach der konventionellen Interpretation sein sollte.

2.1.2 Freies Gaußpaket

Ein „realistischeres“ System, als die Überlagerung von nur einigen Eigenfunktionen ist das Gaußsche Wellenpaket. In vielen Fällen gilt ein solches Wellenpaket als gutes Modell für „Teilchen“. Wir betrachten ein freies Wellenpaket und berechnen analytisch die Geschwindigkeit und das Quantenpotential.

Das Gaußsche Wellenpaket soll zum Zeitpunkt $t = 0$ den Ortserwartungswert x_0 und den Impulserwartungswert $\hbar k_0$ besitzen. Es ist im Ortsraum gegeben durch

$$\phi(x, 0) = \langle x|\phi; 0\rangle = A_x \exp\{-\alpha x'^2 + \mathrm{i} k_0 x'\},$$

mit $x' := x - x_0$. Der Normierungsfaktor ist

$$A_x = \sqrt[4]{\frac{2\alpha}{\pi}}.$$

Um die Zeitentwicklung zu betrachten, entwickeln wir die Anfangswellenfunktion in Energie-Eigenfunktionen

$$\psi(x, t, k) = \langle x|\psi; t; k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{\mathrm{i}kx - \mathrm{i}Et\},$$

$$E = \frac{k^2}{2m}.$$

Durch Fouriertransformation erhalten wir die Entwicklungskoeffizienten

$$\begin{aligned} c(k) &= \langle \psi; 0, k | \phi; 0 \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \langle \psi; 0, k | x \rangle \langle x | \psi; 0 \rangle \\ &= A_k \exp\left\{ -\frac{k'^2}{4\alpha} - \mathrm{i}k'^2 x_0 \right\}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} k' &= k - k_0, \\ A_k &= \frac{A_x}{\sqrt{2\alpha}} exp\left\{\mathrm{i}k_0 x_0\right\} = \frac{1}{\sqrt[4]{2\alpha\pi}} \exp\{-\mathrm{i}k_0 x_0\} \end{aligned}$$

definiert wurde. Die Wellenfunktion im k-Raum zu einem beliebigen Zeitpunkt ist

$$\begin{aligned} \phi(k,t) &= \langle k | \phi; t \rangle \\ &= A_k \exp\left\{ -\frac{k'^2}{4\alpha} - \mathrm{i}k' x_0 - iEt \right\}. \end{aligned}$$

Ordnen wir den Exponenten nach Potenzen von k und transformieren die Wellenfunktion zurück in den Ortsraum. Wir erhalten das Wellenpaket in der Form

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{A_k}{\sqrt{2a}} \exp\{\frac{c + (b + \mathrm{i}x)^2}{4a}\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|a|^2}} \, A_k \, \sqrt{a^*} \exp\{\frac{c + (b + \mathrm{i}x)^2}{4a}\}. \end{aligned}$$

Hierbei lauten die Koeffizienten

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4\alpha} + \frac{\mathrm{i}t}{2m} \\ b &= \frac{k_0}{2\alpha} - ix_0 \\ c &= -\frac{{k_0}^2}{4\alpha} + ik_0 x_0 \end{aligned}$$

Die Entwicklung in Eigenfunktionen ist der Diplomarbeit von Thilo Groß [8] entnommen.

Um die lokale Geschwindigkeit eines Teilchens, das durch dieses Wellenpaket beschrieben wird, zu berechnen, müssen wir den Gradienten der Phase des Wellenpaketes bestimmen. Dazu schreiben wir das Paket in Polarform.

Zur Vereinfachung kennzeichnen wir Real- und Imaginärteile der Koeffizienten mit Index R bzw. I.

Als erstes wird das Argument der Exponentialfunktion

$$B = \frac{c + (b + ix)^2}{4a} = \frac{1}{4|a|^2} \, a^* \, (c + (b + \mathrm{i}x)^2)$$

in Real- und Imaginärteil separiert. Der Realteil ergibt sich zu

$$B_R = \frac{1}{4|a|^2} \big(a_R \, (c_R + {b_R}^2 - {b_I}^2 - x^2 - 2xb_I) + a_I \, (c_I + 2b_R b_I + 2xb_R) \big),$$

der Imaginäteil zu

$$B_I = \frac{1}{4|a|^2}\big(a_R\ (c_I + 2b_R b_I + 2x b_R) - a_I\ (c_R + {b_R}^2 - {b_I}^2 - x^2 - 2x b_I)\big).$$

Die Wellenfunktion ist damit

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2|a|^2}}\ A_k\ \sqrt{a^*}\exp\{B_R\}\exp\{\mathrm{i}B_I\}.$$

Die Phase der Wellenfunktion ist

$$S = B_I + \mathrm{Phase}(A_k) + \mathrm{Phase}\left(\sqrt{a^*}\right).$$

Der Phasenanteil von A_k ist konstant, die Phase von $\sqrt{a^*}$ hat keine Ortsabhängigkeit. Damit ergibt sich für den Gradienten der Phase

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}S = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}B_I = \frac{1}{2|a|^2}\big(a_R b_R + a_I(x + b_I)\big).$$

Die lokale Geschwindigkeit ist also

$$v = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{2|a|^2}(a_R b_R + a_I(x + b_I)).$$

Setzt man die Koeffizienten wieder ein, erhält man

$$v = \frac{k_0}{m - \dfrac{4\alpha^2 t^2}{m}} + \frac{t(x - x_0)}{\dfrac{m^2}{4\alpha} - t^2}.$$

In den Abb. 2.5 und 2.6 sind Trajektorien und die Geschwindigkeiten dieser Trajektorien gezeigt. Es wurde hierbei $x_0 = k_0 = 0$ gewählt. Die Trajektorien laufen symmetrisch auseinander.

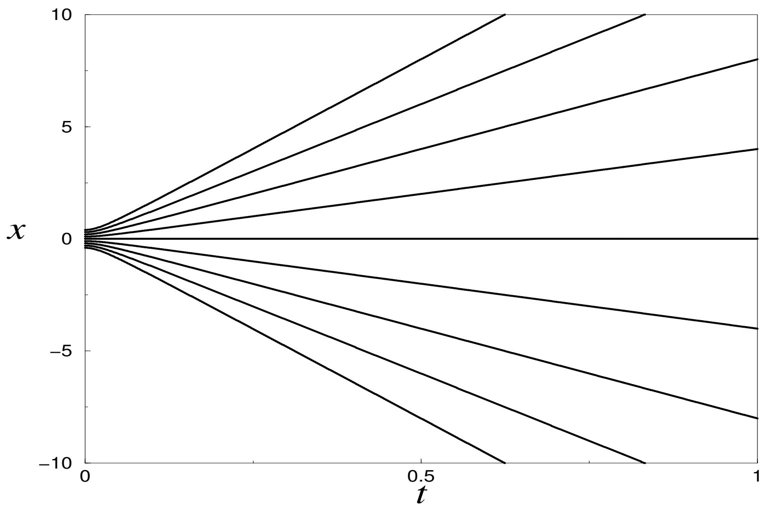

Abbildung 2.5: Bahnen eines freien Teilchens, dass durch ein Gaußpaket beschrieben wird. Die Erwartungswerte des Gaußpaketes sind $x_0 = k_0 = 0$.

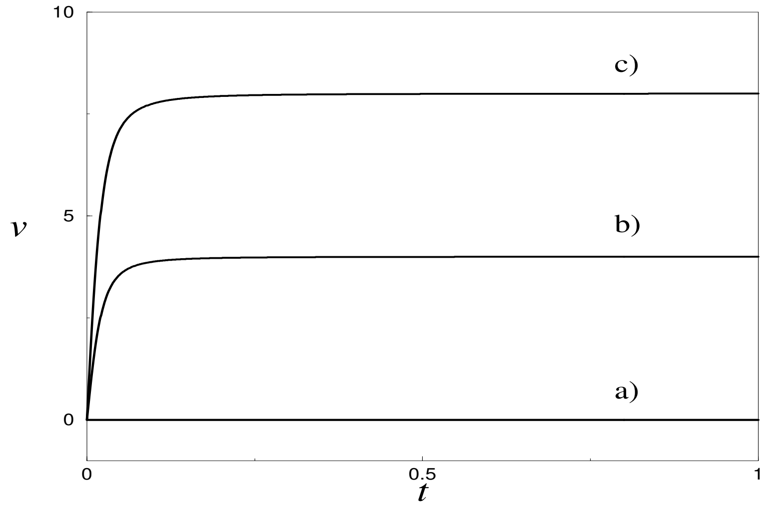

Abbildung 2.6: Geschwindigkeiten eines freien Teilchens, dass sich auf den Bahnen mit Anfangsort a) $x(0) = 0$, b) $x(0) = 0.1$ und c) $x(0) = 0.2$ bewegt. Das Teilchen ist durch ein Gaußpaket mit Erwartungswerten $x_0 = k_0 = 0$ gegeben.

Die Amplitude des Gaußpaketes ist

$$R = \frac{|A_k|}{\sqrt{2|a|}} \exp\{B_R\}$$

Das Quantenpotential berechnet sich als

$$\mathcal{Q} = -\frac{1}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}.$$

Die zweite Ableitung der Amplitude ist

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}\sqrt{\frac{|A_k|^2}{2|a|}}\exp\{B_R\} = \sqrt{\frac{|A_k|^2}{2|a|}}\exp\{B_R\}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}B_R + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}B_R\right)^2\right).$$

Damit ist das Quantenpotential

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= -\frac{1}{2m}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dx}^2}B_R + \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}B_R\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{2}\frac{a_R}{|a|^2} - \left(\frac{1}{2|a|^2}\left((-b_I - x)a_R + b_R a_I\right)\right)^2\right). \end{aligned}$$

Das Quantenpotential hat die Form einer nach unten geöffneten Parabel, mit dem Maximum an der Stelle x_0. Mit der Zeit wird $\mathcal{Q}$ immer flacher. In Abb. 2.7 ist die zeitliche Entwicklung des Quantenpotentials dargestellt.

An diesem Beispiel lässt sich die Wirkung des Quantenpotentials verdeutlichen. Die Trajektorie, die genau bei x_0, also auf dem Maximum des Quantenpotentials beginnt, bleibt auf dem Maximum (wenn die Trajektorie nicht gestört wird). Dort ist der Gradient des Quantenpotentials null und somit erfährt das Teilchen keine Kraftwirkung. Beginnt eine Trajektorie bei $x \neq x_0$ ist $\nabla\mathcal{Q} \neq 0$ und die Trajektorie wird beschleunigt. Die zeitliche Entwicklung des Quantenpotentials zeigt, dass die Parabel immer flacher wird und die Steigung gegen null geht. Die Geschwindigkeiten der Trajektorien konvergieren gegen einen konstanten Wert.

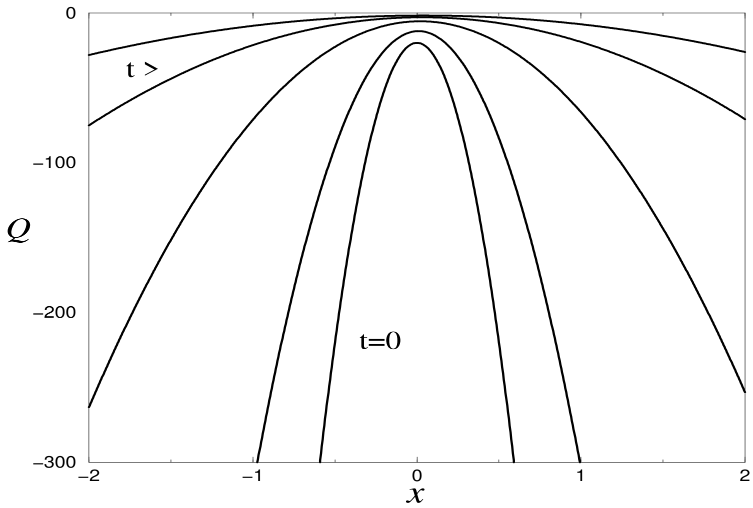

Abbildung 2.7: Zeitliche Entwicklung des Quantenpotentials eines Gaußpaketes mit Erwartungswerten $x_0 = k_0 = 0$

Ein dreidimensionales gaußsches Wellenpaket wird in [6] diskutiert.

2.2 Relativistische Beispiele

2.2.1 Ein Teilchen in einem skalaren Kastenpotential

In diesem Anschnitt betrachten wir ein einfaches relativistisches System, auf das wir die Theorie de Broglies anwenden. Wie im ersten nicht-relativistischen Beispiel, betrachten wir ein „Testteilchen" in einem skalaren Potentialkasten mit harten Wänden.

Die Wellenfunktion des Systems wird als Überlagerung von Eigenfunktion dargestellt. Die Eigenfunktionen sind Lösungen der Klein-Gordon Gleichung. Wie zuvor sind die Energie-Eigenfunktionen in Polarform gegeben. Sie lauten

$$\psi_n = A\,\sin(kx)\,\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t\right\},$$

mit

$$\begin{aligned} k &= n\pi/L \\ A &= \sqrt{2/L} \\ E &= \pm\sqrt{(mc^2)^2 + \left(\frac{c\hbar\pi}{L}\,n\right)^2}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Wellenfunktion ist

$$\Psi = \sum_n c_n \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}t\,\sqrt{(mc^2)^2 + \left(\frac{c\hbar\pi}{L}\,n\right)^2}\right\},$$

wobei wir hier die Wellenfunktion mit positiver Energie betrachten.

Da in der Relativitätstheorie Raum und Zeit gleichberechtigte Dimensionen sind, berechnen wir die Bahnen nicht über die durch Gleichung (1.6) gegebene Dreier-Geschwindigkeit

$$v_i = \frac{p^k}{p^0} = \frac{\partial^k S}{-\partial^0 S}.$$

Eine Integration der Dreier-Geschwindigkeit setzt eine kontinuierlich fortschreitende Zeit als Integrationsparameter voraus. Wir betrachten die Raum-Zeit als „Phasenraum" der Zustandsvariablen Raum und Zeit. Die Bahnen berechnen wir als Trajektorien in diesem Phasenraum:

$$\begin{aligned} x &= -\int \mathrm{d}\tau \partial^k S \\ t &= \int \mathrm{d}\tau\ \partial^0 S. \end{aligned}$$

Der Integrationsparameter ist die Eigenzeit. Damit ist die Zeitkomponente der Trajektorie der Ortskomponente gleichgestellt und wird nicht in Zukunftsrichtung gezwungen. Diese Art der Berechnung ermöglicht es, auch Bahnen mit unendlicher Geschwindigleit bzw. mit einer Zeitumkehr zu simulieren.

Im Folgenden betrachten wir ein „Testteilchen", dessen Wellenfunktion durch Überlagerung der ersten beiden Eigenfunktionen ($n = 1, 2$) gegeben ist

$$\Psi = \sin(\pi x) \exp\left\{\mathrm{i}\, t\sqrt{1+\pi^2}\right\} + \sin(2\pi x) \exp\left\{\mathrm{i}\, t\sqrt{1+4\pi^2}\right\}$$

wobei $L = m = 1$ und $c = \hbar = 1$.

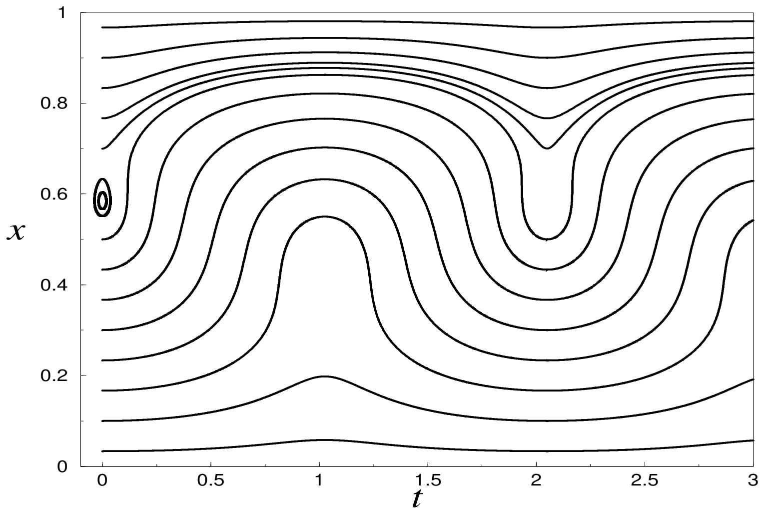

Abbildung 2.8: Mögliche Bahnen eines relativistischen „Teilchens" in einem skalaren Kastenpotential. Der Zustand ist die Überlagerung des 1. und 2. Eigenzustandes.

In Abb. 2.8 sind mögliche Bahen für dieses Teilchen dargestellt. Die Bahnen haben in einem großen Bereich des Kastens Überlichtgeschwindigkeit (Steigung der Trajektorien ist grösser 1). In regelmässigen Abständen treten Bereiche auf, in denen geschlossene Raum-Zeit-Bahnen (Loops) entstehen. In den Bereichen in denen die Bahnen raumartig sind, ist $\mathcal{Q} < -1$. Die quantenkorrigierte Massen M^* (1.7)

$$M^* = \frac{M_0}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{m_0\sqrt{1+\mathcal{Q}}}{\sqrt{1-v^2}}. \tag{2.1}$$

ist so trotz der raumartigen Bewegung grösser null.

Bei $x = 2/3$ und $t = 0$ ist die Amplitude der Wellenfunktion null und somit hat $\mathcal{Q}(x, 0)$ dort eine Polstelle. Die Teilchendichte bei $x = 2/3$, $t = 0$ ist $\rho(x, 0) = |\Psi(x, 0)|^2 = 0$ und es fängt dort keine Trajektorie an. In dem Raum-Zeit-Bereich in dem $\mathcal{Q}$ gegen $-\infty$ läuft treten die Loops auf.

Die Quantenkorrektur ist auch in der Nähe der Kastenränder zum Teil stark negativ. Es treten dort jedoch nie raumartige Trajektorien auf. Ob dieses ein Problem der harten Kastenrändern ist, ist noch zu klären. Rechnerisch treten an den Rändern Polstellen der Quantenkorrektur auf, da der Kehrwert der Amplitude, die dort Null ist, in die Rechnung einfließt (siehe Gleichung 1.5).

Untersuchen wir nun die Statistik eines Bahnenensembles. Die Anfangsorte des Ensembles entsprechen $|\Psi(x, 0)|^2$ (siehe Abb. 2.2). Die Mittelwerte der Orte und der Geschwindigkeiten werden wie im nicht-relativistischen Beispiel berechnet. In dem Bereich, in dem Loops auftreten, sind weniger Bahnen, da dort die Ortsverteilung gering ist.

Die Umkehrpunkte der Loops haben eine unendliche Geschwindigkeit. Die numerisch berechnete mittlere Geschwindigkeit (Mittel endlich vieler benachbarter Trajektorien) ist zu genau den Zeiten unendlich gross. Es wäre hier noch zu prüfen, ob diese Peaks verschwinden würden, wenn alle unendlich vielen Trajektorien gemäß ihrer Verteilung berücksichtigt würden. Wäre das nicht der Fall, erhiehlte man hier eine zusätzliche Information über das Auftreten der Loops, die die konventionelle Quantenmechanik nicht liefern kann. Die mittlere Geschwindigkeit aller Trajektorien kann wie folgt berechnet werden:

$$\bar{v} = \frac{\displaystyle\int_0^1 -\frac{\frac{\partial}{\partial x}S}{\frac{\partial}{\partial t}S}|\Psi|^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 |\Psi|^2 dx} = \frac{\displaystyle\int_0^1 -\frac{\Psi^* \frac{\partial}{\partial x}\Psi}{\Psi^* \frac{\partial}{\partial t}\Psi}|\Psi|^2 dx}{\displaystyle\int_0^1 |\Psi|^2 dx}.$$

Es wäre abzuschätzen, ob dieser Ausdruck konvergiert.

In der numerischen Berechnung der Orts- und Geschwindigkeitsmittelwerte bestehen jedoch Probleme. Es kann nur mit einer begrenzten Anzahl von Trajektorien gerechnet werden, und die Mittelwerte werden nur an bestimmten Zeitpunkten berechnet. Ausserdem werden die Loops mehrere Male durchlaufen, da die Integration für eine bestimmte Anzahl von Schritten auf der Trajektorie berechnet wird. Die Werte an den Stellen eines Loops treten in der Berechnung mehrfach (mehrere 100 mal) auf. Dadurch sind die Mittelwerte in den ersten Zeitschritten, und nur in diesen, zusätzlich verfälscht. Berücksichtigt man dieses Problem, ist zu erkennen, dass der Geschwindigkeitsmittelwert maximal $0.56\,c$ ist. Abgesehen von den numerischen Problemen stimmen die Mittelwerte für Ort und Geschwindigkeit mit den Erwartungswerten der konventionellen relativistischen Quantenmechanik überein (Abb. 2.9).

Zur Vereinfachung der Berechnung der Erwartungswerte verwenden wir das nichtrelativistische Skalarprodukt angewendet auf die relativistische Wellenfunktion. Der Ortserwartungswert ist dann

$$\langle x \rangle = \int_0^L \Psi\ x\ \Psi^* \mathrm{dx} = \frac{1}{2} - \left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \cos\left(t\left(\sqrt{1+\pi^2} - \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right).$$

Der kovariante Impulserwartungswert berechnet sich mittels des Vierer-Operators $\mathrm{p} = -\mathrm{i}\partial^\mu$. Die Dreier-Geschwindigkeit berechnet sich als Quotient aus Impuls und

Energie, also räumliche Impulskomponente geteilt durch zeitliche Impulskomponente. Der Dreier-Ortserwartungswert ist damit

$$\langle v\rangle = \frac{\int_o^L \Psi \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi^* \mathrm{dx}}{\int_o^L \Psi \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\Psi^* \mathrm{dx}} = \frac{5}{9}\sin\left(-t\left(\sqrt{1+\pi^2}-\sqrt{1+4\pi^2}\right)\right).$$

auch hier wurde zur Vereinfachung das nichtrelativistische Skalarprodukt gewählt. Die Übereinstimmung der Bohmschen Mittelwerte und der Erwartungswerte rechtfertigt diese Vereinfachung.

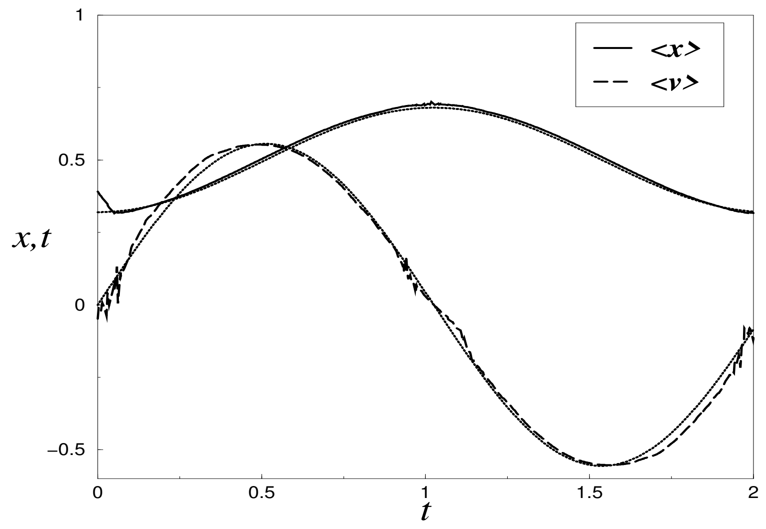

Abbildung 2.9: Mittelwerte des Ensembles von Bahnen eines Teilchens in einem Kastenpotential und konventionelle Erwartungswerte des Systems. Der Zustand des Teilchens ist durch Überlagerung des 1. und 2. Eigenzustandes gegeben. Die konventionellen Erwartungswerte sind als gepunktete Kurven über die entsprechenden Mittelwerte gelegt.

2.2.2 Relativistisches Gaußpaket im Kastenpotential

In vielen Fällen ist ein gaußsches Wellenpacket ein gutes Modell zur Beschreibung von „Teilchen". Es war uns nicht möglich ein freies relativistisches Gaußpaket, in Analogie zur Berechnung des nicht-relativistischen Gaußpaketes, geschlossen zu berechnen. Um Geschwindigkeiten bzw. Bahnen zu bestimmen, benötigen wir jedoch eine analytische Wellenfunktion im Ortsraum.

Als Alternative betrachten wir ein gaußsches Wellenpaket in einem skalaren Kastenpotential. Das Wellenpaket nähern wir numerisch aus überlagerten Eigenfunktionen

$$\psi_n = A\ \sin(kx)\ \exp\left\{\frac{\mathrm{i}}{\hbar}E_n t\right\},$$

mit

$$E_n = \sqrt{(mc^2)^2 + \left(\frac{c\hbar\pi}{L}\, n\right)^2}$$

an.

Die Entwicklungskoeffizienten c_n sind

$$\begin{aligned} c_n &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{dx}\langle\psi_n|x\rangle\langle x|\psi;0\rangle \\ &= A_n \frac{1}{2i}\sqrt[4]{\frac{2\pi}{\alpha}}\left[\exp\left\{\mathrm{i}k_n x_0 - \frac{(k_-)^2}{4\alpha}\right\} - \exp\left\{-\mathrm{i}k_n x_0 - \frac{(k_+)^2}{4\alpha}\right\}\right] \end{aligned}$$

wobei

$$k_\pm = k_0 \pm k_n$$

ist. Auch hier wurde zur Vereinfachung das nichtrelativistische Skalarprodukt verwendet. Die Koeffizienten spalten wir in Amplituden- und Phasenanteil auf, die jeweils zu den Amplituden und Phasen der entsprechenden Eigenfunktionen multipliziert bzw. addiert werden.

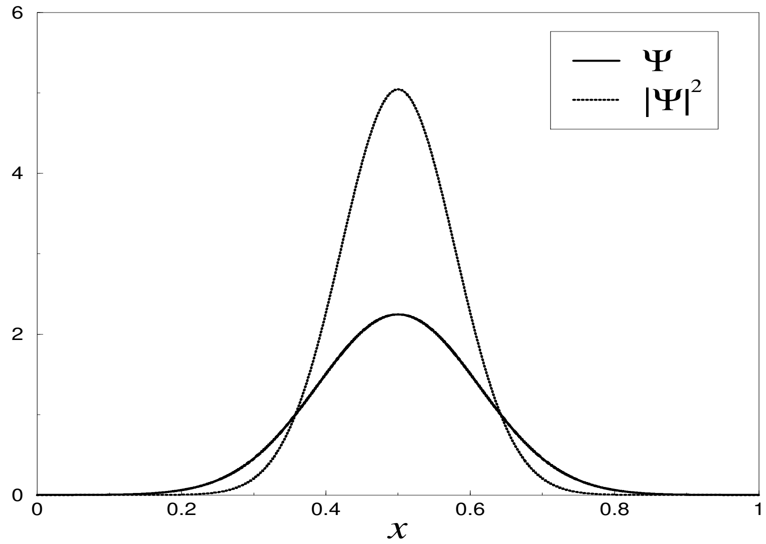

Abbildung 2.10: ψ und $|\Psi|^2$ des angenäherten Gaußpaketes. $\alpha = 40$, $k_0 = 0$. $\int_0^1 \mathrm{dx}|\Psi|^2 = 1$.

Die Amplitude bei $t = 0$ des angenäherten Gaußpaketes ist in Abb. 2.10 gezeigt. Hier ist der Koeffizient $\alpha = 40$. Ein kleineres α ergibt eine entsprechend breitere Amplitude des Wellenpaketes. Abb. 2.11 zeigt die zeitliche Entwicklung von $|\Psi|^2$ für $\alpha = 20$ und $k_0 = 0$ und $k_0 = 1$. Wie zu erwarten zerläuft das Wellenpaket zu den Kastenrändern und dann wieder zusammen, bis es nach einer Zeit von 1 ZE wieder die ursprüngliche Form hat.

Die möglichen Bahnen (Abb. 2.12) des Wellenpaketes mit $\alpha = 20$ und $k_0 = 0$, die im zentralen Bereich des Kastens beginnen, laufen symmetrisch zu den Kastenrändern und wieder zusammen. Die Bahn, die genau in der Mitte beginnt, wird immer in der Mitte bleiben. In den äußeren Bereichen treten Loops auf.

Der Ortsmittelwert eines Ensembles von Bahnen dieses Wellenpaketes ist bis auf numerische Ungenauigkeiten genau $\langle x\rangle = 0.5$ und entspricht dem Ortserwartungswert des Gaußpaketes. Der Geschwindigkeitsmittelwert der Bahnen ist bis

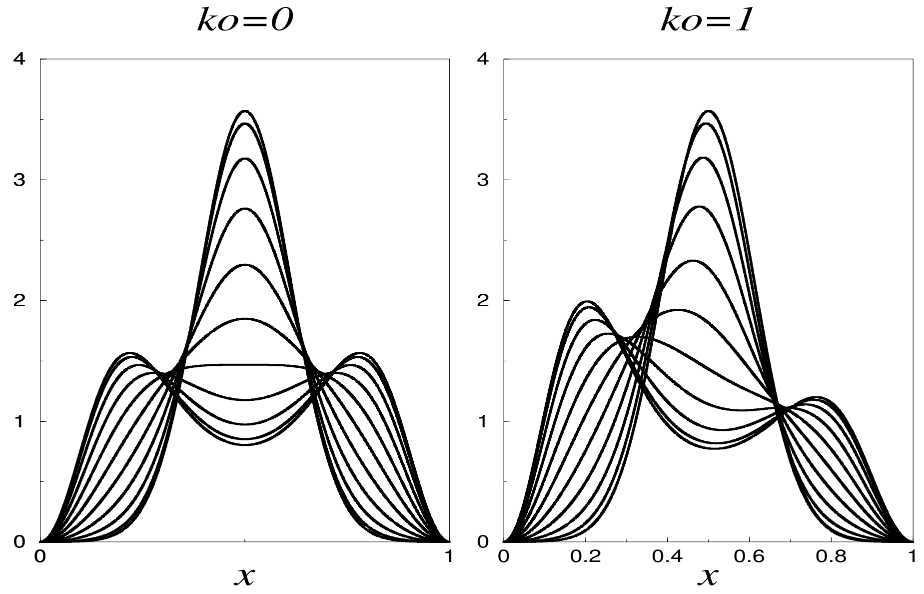

Abbildung 2.11: Zeitliche Entwicklung von $|\Psi(x,t)|^2$ des angenäherten Gaußpaketes. $\alpha = 20$.

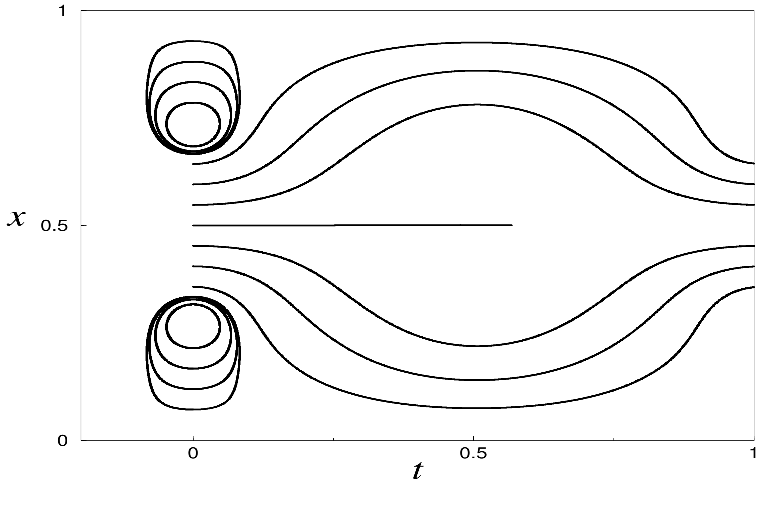

Abbildung 2.12: Mögliche Bahnen eines relativistischen Teilchens in einem Kastenpotential. Das Teilchens ist durch ein angenähertes Gaußpaket gegeben. $\alpha = 20$, $k_0 = 0$.

auf numerische Ungenauigkeiten $\langle v \rangle = 0$ und entspricht dem Geschwindigkeitserwartungswert. Da das Wellenpaket und damit auch die Bahnen symmetrisch sind, heben sich die unendlichen Geschwindigkeiten der Loops genau weg. In der numerischen Berechnung kann das nicht der Fall sein, da nur mit 5000 Bahnen gerechnet wurde. Die zufällig ausgewählten Anfangsorte sind nicht exakt symmetrisch verteilt

Bekommt das Wellenpaket einen Anfangsimpuls $k_0 = 0.5$ verlaufen die möglichen Bahnen nicht symmetrisch (Abb. 2.13). Die Bahnen haben eine Anfangsgeschwindigkeit. Es laufen mehr Bahnen in die eine, als in die andere Richtung.

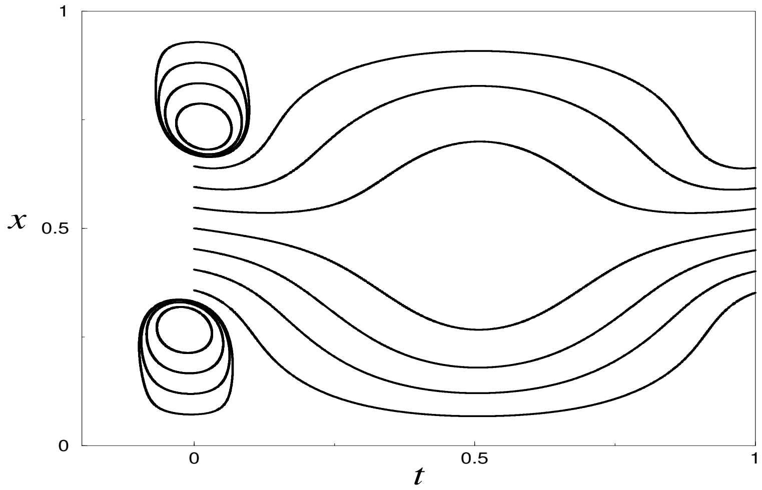

Abbildung 2.13: Mögliche Bahnen eines relativistischen Teilchens in einem Kastenpotential. Das Teilchens ist durch ein angenähertes Gaußpaket gegeben. $\alpha = 20$, $k_0 = 0.5$

Es ist zu erwarten, dass die de Broglie Theorie richtige Aussagen in Bezug auf Erwartungswerte, aber vor allem auch der Unschärfen macht. Auf Grund von fehlender Rechenzeit liegen genaue numerischen Ergebnisse für die Mittelwerte und Unschärfen nicht vor.

Kapitel 3

Fazit

Der Ansatz von de Broglie für eine relativistische Interpretation der Bohmschen Mechanik ist allgemein nicht anerkannt, da raumartige Bahnen auftreten können. Ausserdem sind die Bahnen nicht zwangsläufig zukunftsgerichtet.

Uns ist es gelungen zu zeigen, dass in der relativistischen Bohmschen Mechanik nach de Broglie die Energien von "Teilchen" auf raumartigen Trajektorien nicht, wie allgemein angenommen, imaginär sind. Es werden endliche reelle Energien für *alle* Geschwindigkeiten vorausgesagt.

Die Erwartungswerte der konventionellen Quantenmechanik werden durch die Bohmsche Mechanik reproduziert. In realistischen Situationen, wie der Betrachtung eines Gaußschen Wellenpaketes ist zu erwarten, das auch die Unschärfen richtig vorausgesagt werden.

Die de Broglie Theorie beinhaltet die konventionelle Quantenmechanik, führt sie aber weiter und zeigt dabei interessante Effekte, wie Raum-Zeit-Loops, die wir als virtuelle Paare interpretieren. Die konventionelle Quantenmechanik kann diese nicht voraussagen, da die unendlichen Geschwindigkeiten der Erzeugung und Vernichtung des virtuellen Paares im Mittelwert (Erwartungswert) entweder als Delta-Peaks oder gar nicht auftreten. Die Loops können von der Statistik der konventionellen Quantenmechanik nicht erfasst werden.

Danksagung

Ich danke Chris Dewdey und George Horton, die mich in die Thematik der Bohmschen Quantenmechanik eingeführt haben.

Thilo Groß danke ich für die vielen Anregungen und Ideen, mit denen er mit zur Seite stand.

Ausserdem danke ich Jutta Kunz und Lutz Polley, die mir dieses Projekt ermöglicht haben.

Anhang A

Anhang

A.1 Real und Imaginärteil der Schrödinger-Gleichung

Wir setzen in die Schrödingergleichung die Wellenfunktion in Polarform ein

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}/\hbar S} &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+V\right)R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}/\hbar S} \\
\Longleftrightarrow \mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}R-R\frac{\partial}{\partial t}S &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2R+\frac{\mathrm{i}}{\hbar}R\nabla^2S+\frac{2\mathrm{i}}{\hbar}\nabla R\nabla S-\frac{1}{\hbar^2}R(\nabla S)^2)+VR\,.
\end{aligned}
$$

Der Realteil dieser Gleichung ist

$$
\begin{aligned}
-R\frac{\partial}{\partial t}S &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2R-\frac{1}{\hbar^2}R(\nabla S)^2)+VR \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}S &+ \frac{1}{2m}(\nabla S)^2-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2R}{R}+V=0\,.
\end{aligned}
$$

Der Imaginärteil ist

$$
\begin{aligned}
\hbar\frac{\partial}{\partial t}R &= -\frac{\hbar^2}{2m}(\frac{1}{\hbar}R\nabla^2S+\frac{2}{\hbar}\nabla R\nabla S) \\
\Longleftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t}R &+ \frac{1}{2m}(R\nabla^2S+2\nabla R\nabla S)=0\,.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichung wird so umgeformt, dass der Term R nur quadratisch auftaucht. Dazu erweitern wir die Gleichung mit $2R$

$$
2R\frac{\partial}{\partial t}R+\frac{1}{m}(R^2\nabla^2S+2R\nabla R\nabla S)=0.
$$

Verwenden wir, dass $\partial/\partial t\ R^2=2R\partial/\partial t\ R$ und $\nabla(R^2\nabla S)=2R\nabla R\nabla S+R^2\nabla^2S$, so erhalten wir

$$
\frac{\partial}{\partial t}R^2+\frac{1}{m}\nabla(R^2\nabla S)=0.
$$

A.2 Geschwindigkeit

Die bohmschen Geschwindigkeit ist über die Stromdichte definiert

$$
\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{j}}{|\Psi|^2}\,.
$$

Die Stromdichte ist

$$\frac{\boldsymbol{j}}{|\Psi^*|} = -\mathrm{i}\frac{\hbar}{2m}\left(\frac{\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*}{|\Psi^*|}\right) \equiv \frac{\hbar}{2m}\Im\left(\frac{\nabla\Psi}{\Psi}\right) .$$

Zur Vereinfachung setzen wir $\hbar = 1$.Wir setzen die Wellenfunktion in Polarform ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= -\frac{\mathrm{i}}{2m}\frac{R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S}\nabla(R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S}) - R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S}\nabla(R\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S})}{R^2} \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2m}\frac{R(\nabla R + \mathrm{i}R\nabla S) - R(\nabla R - \mathrm{i}R\nabla S)}{R^2} \\
&= -\frac{\mathrm{i}}{2m}\frac{2\mathrm{i}R^2\nabla S)}{R^2} \\
&= \frac{1}{m}\nabla S .
\end{aligned}$$

A.3 Real und Imaginärteil der Klein-Gordon-Gleichung

Wir betrachten zur Vereinfachung die Klein-Gordon Gleichung ohne elektromagnetisches Feld

$$(\mathrm{i}\partial_\mu)(\mathrm{i}\partial^\mu)\Psi = m_0^2\Psi.$$

Hierbei ist $\hbar = c = 1$. In die Klein-Gordon Gleichung setzen wir die Wellenfunktion in Polarform ein

$$\begin{aligned}
& m_0^2 R\,e^{\mathrm{i}S} = (\mathrm{i}\partial_\mu)(\mathrm{i}\partial^\mu)Re^{\mathrm{i}S} \\
\Longleftrightarrow\quad & m_0^2 R = (\mathrm{i}\partial_\mu)\left((\mathrm{i}\partial^\mu R) - R(\partial^\mu S)\right) \\
\Longleftrightarrow\quad & m_0^2 R = -\partial_\mu\partial^\mu R - \mathrm{i}R\,\partial_\mu\partial^\mu S - \mathrm{i}(\partial^\mu S)(\partial_\mu R) - (\mathrm{i}\partial^\mu R - R\,\partial^\mu S)\,\partial_\mu S .
\end{aligned}$$

Der Realteil dieser Gleichung ist

$$\begin{aligned}
& m_0^2 R = -\partial_\mu\partial^\mu R + R\,\partial^\mu S\,\partial_\mu S \\
\Longleftrightarrow\quad & R\,m_0^2 + \partial_\mu\partial^\mu R = R\,\partial^\mu S\,\partial_\mu S \\
\Longleftrightarrow\quad & \frac{m_0^2 + \partial_\mu\partial^\mu R}{R} = \partial^\mu S\,\partial_\mu S \\
\Longleftrightarrow\quad & m_0^2\left(1 + \frac{\partial_\mu\partial^\mu R}{m_0^2\,R}\right) = \partial^\mu S\,\partial_\mu S
\end{aligned}$$

Der Imaginärteil der Gleichung ist

$$\begin{aligned}
0 &= -R\,\partial_\mu\partial^\mu S - \partial^\mu S\,\partial_\mu R - \partial^\mu R\,\partial_\mu S \\
&= -R\,\partial_\mu\partial^\mu S - 2\,\partial_\mu R\,\partial^\mu S \\
&= -R\,\partial_\mu\partial^\mu S - \frac{2\,R\partial_\mu R}{R}\,\partial^\mu S \\
&= -R\,\partial_\mu\partial^\mu S - \frac{\partial_\mu R^2}{R}\,\partial^\mu S \\
&= -R^2\,\partial_\mu\partial^\mu S - \partial_\mu R^2\,\partial^\mu S \\
&= \partial_\mu\left(-R^2\,\partial_\mu S\right) .
\end{aligned}$$

Teilen wir diese Gleichung jetzt noch durch die Ruhemasse m_0, so erhalten wir

$$\partial_\mu\left(-\frac{R^2}{m_0}\,\partial_\mu S\right) = 0.$$

A.4 Gradient der Gesamtphase

Der Gradienten der Gesamtphase einer Wellenfunktion, die als Überlagerung beliebiger Wellenfunktionen in Polarform gegeben ist, wird durch die Terme R, S, ∇R und ∇S dargestellt. Die Wellenfunktion lautet

$$\Psi = \sum_n R_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_n}.$$

Zur Vereinfachung wurde $\hbar = 1$ gesetzt. Die Überlagerungskoeffizienten c_n sind in den jeweiligen R_n enthalten.

$$\Psi = \sum_n R_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_n} \ .$$

Der Gradient der Gesamtphase ist

$$\nabla S_{\text{total}} = \Im\left(\frac{\Psi^* \nabla\Psi}{|\Psi|^2}\right) = \Im\left(\frac{\sum_n R_n \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S_n} \nabla\left(\sum_m R_m \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_m}\right)}{\left|\sum_n R_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_n} R_n\right|^2}\right).$$

Wir berechnen Nenner und Zähler einzeln:

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi &= \sum_n \nabla\left(R_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_n}\right) \\
&= \sum_n \left(\nabla R_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_n} + \mathrm{i}R_n \nabla S_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_n}\right) \ ,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Psi^* \nabla\Psi &= \left(\sum_n R_n \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S_n}\right) \cdot \left(\sum_m \left(\nabla R_m \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_m} + \mathrm{i}R_m \nabla S_m \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_m}\right)\right) \\
&= \sum_{n=m} \left(R_n \nabla R_n + \mathrm{i}R_n^2 \nabla S_n\right) + \sum_n \sum_{m \neq n} \left(R_n \nabla R_m + \mathrm{i}R_m R_n \nabla S_n\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(S_n - S_m)} \\
&= \sum_n \sum_m (R_n \nabla R_m + \mathrm{i}R_m R_n \nabla S_n) \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(S_n - S_m)} \ ,
\end{aligned}$$

$$\Im(\Psi^* \nabla\Psi) = \sum_n \sum_m (R_m R_n \nabla S_m \cos(S_n - S_m) - (R_n \nabla R_m) \sin(S_n - S_m)) \ ,$$

$$\begin{aligned}
|\Psi|^2 &= \sum_n \left(R_n \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_n}\right) \cdot \sum_m \left(R_m \,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}S_m}\right) \\
&= \sum_{n=m} R_n^2 + \sum_n \sum_{m \neq n} R_n R_m (\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(S_n - S_m)}) \\
&= \sum_n \sum_m R_n R_m \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(S_n - S_m)} \\
&= \sum_n \sum_m R_n R_m \cos\left(S_n - S_m\right) .
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Gleichung für beliebige Überlagerungen

$$\nabla S_{\text{total}} = \frac{\sum_{n,m} \left(R_m R_n \nabla S_m \cos(S_n - S_m) - R_n \nabla R_m \sin(S_n - S_m)\right)}{\sum_{n,m} R_n R_m \cos\left(S_n - S_m\right)}.$$

Literaturverzeichnis

[1] D. Bohm. A suggested interpretation of the quantum theory in terms of „hidden“ variables. 1. *Phys. Rev. Lett.*, 85(2), 1952.

[2] Louis de Broglie. *Non-Linear Wave Mechanics.* Elsevier Publishing Company, 1960.

[3] F. Schwabl. *Quantenmechanik.* Springer, 4. edition, 1993.

[4] Detlef Dürr. *Bohmsche Mechanik als Grundlage der Quantenmechanik.* Springer-Verlag, 2001.

[5] Sheldon Goldstein. Quantum theory without observers. *Part One/ Part Two:Physics Today*, März, Aplil, 1998.

[6] Peter R. Holland. *The Quantum Theory of Motion.* Cambridge University Press, 1993.

[7] Alexei Nestruk G. Horton, C. Dewdney. Time-like flow of energy-momentum and particle trajectories for the klein-gordon equation. *J. Phys.A: Math. Gen*, 33, 2000.

[8] Thilo Groß. Impact fusion als detektor für nahfeldstreuung. Master's thesis, Carl von Ossietzky Universität Oldenburg, 2001.