Komplexe Zahlen und e-Funktion — eine Kurz-Einführung

L.Polley, Fachbereich Physik, Universität Oldenburg

Physikalische Motivation

Die Quantenmechanik zeigt, daß komplexe Zahlen “physikalisch” sind: *Auf der Ebene der Atome reduziert sich jeder zeitliche Vorgang auf eine Summe von Zahlen, die in der komplexen Zahlenebene rotieren.*

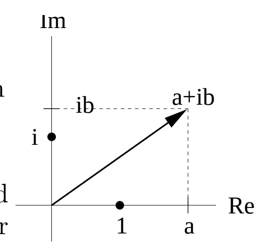
Rechenregeln als Grundlage

Zahlen werden durch die Rechenregeln definiert, die für sie gelten sollen (axiomatischer Zahlenbegriff). Wenn man von Fragen der Konvergenz von Zahlenfolgen hier absieht, braucht man nur zwei Regeln:

(1) Addieren und Multiplizieren geht wie im Reellen (Umordnen von Summanden und von Faktoren, Ausmultiplizieren, Ausklammern).

(2) Neben reellen Zahlen gibt es eine Zahl i mit $i^2 = -1$.

Zahlenebene



Die Regeln erlauben sofort Zahlen von der Form

$$z = a + i \cdot b \qquad a, b \text{ reell}$$

Man nennt a Realteil, b Imaginärteil von z, und stellt z als *Vektor* (a, b) in einer Ebene dar. Mehr wird auch nicht gebraucht, weil beim Addieren und Multiplizieren wieder Ausdrücke entstehen, die sich in derselben Form schreiben lassen. Beispiel Addition:

$$(a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

Real- und Imaginärteile addieren sich separat; in der Zahlenebene bedeutet das *Pfeiladdition*.

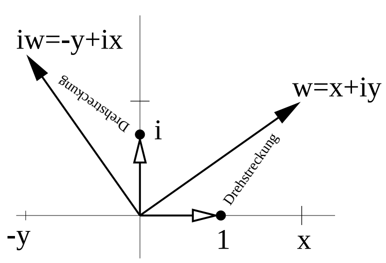
Komplexe Multiplikation

$z = a + ib$ kann man ausführlicher so schreiben:

$$z = a \cdot 1 + b \cdot i$$

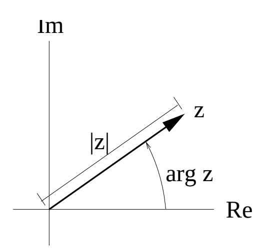
Das heißt: z ist die (Pfeil-)Summe aus dem a-fachen des Vektors 1 und dem b-fachen des Vektors i. Multipliziert man z mit w, so gilt analog

$$z \cdot w = a \cdot w + b \cdot iw$$



Das heißt: die Basisvektoren 1 und i werden ersetzt durch Basisvektoren w und iw. Die Ersetzung $1 \to w$ kann immer als Drehstreckung an- gesehen werden. $i \to iw$ ist aber dieselbe, um 90° gedreht betrachtete Drehstreckung. Also erfährt z insgesamt diese Drehstreckung.

Zeigerdarstellung



Komplexe Zahlen können auch durch Längen und Winkel anstatt durch Real- und Imaginärteil beschrieben werden. Die Länge nennt man *Betrag* und den Winkel mit der positiven reellen Achse *Argument* von z. Obiger Abschnitt zeigt:

Im Produkt $z_1 \cdot z_2$ addieren sich die Argumente und multiplizieren sich die Beträge.

Zahlen vom Betrag 1

In der Quantenmechanik ist der Gebrauch der komplexen Exponentialfunktion weit verbreitet. Dabei nutzt man meistens nur Eigenschaften von Zahlen vom Betrag 1 aus, die sich auch auf einfache algebraische oder geometrische Weise herleiten lassen (siehe vorige Abschnitte).

$\mathrm{e}(\alpha)$ bezeichne im folgenden eine Zahl z vom Betrag $|z| = 1$ und Argument $\arg z = \alpha$. Beim Multiplizieren solcher Zahlen braucht man nur die Winkel zu addieren:

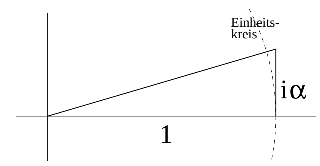
$$\mathrm{e}(\alpha_1)\ \mathrm{e}(\alpha_2) = \mathrm{e}(\alpha_1 + \alpha_2) \qquad \text{Additionstheorem}$$

Durch Projizieren auf die reelle und imaginäre Achse findet man, ausgehend von den geometrischen Definitionen von Sinus und Kosinus,

$$\mathrm{e}(\alpha) = \cos\alpha + i \sin\alpha \qquad \text{Eulersche Formel}$$

Will man die Ableitungen von Sinus und Kosinus als bekannt voraussetzen, so hat man sofort

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\alpha}\, \mathrm{e}(\alpha) = i\ \mathrm{e}(\alpha) \qquad \text{Differentialgleichung}$$



Dies folgt ebensogut aus dem Additionstheorem in Verbindung mit

$$\mathrm{e}(\alpha) \approx 1 + i\alpha$$

für kleine Winkel α (im Bogenmaß).

Exponentialfunktion

Der Vollständigkeit halber muß der Zusammenhang zwischen den “Einheitszahlen” $\mathrm{e}(\alpha)$ und der Exponentialfunktion erwähnt werden.

Physikalisch entsteht die Exponentialfunktion meistens dadurch, daß sich eine Größe mit jedem Zeitschritt *multiplikativ* verändert, d.h. mit einem Faktor $1 + \epsilon$ multipliziert. Nach N Schritten ist der Faktor

$$(1 + \epsilon)^N$$

Halbierte Schrittweite erfordert doppelt so viele Faktoren für denselben Zeitraum — schon hieraus folgt, daß ϵ und N zueinander umgekehrt proportional sein müssen: $\epsilon = x/N$. So gelangt man zu dem Ausdruck

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{x}{N}\right)^N$$

Daß dies für reelle x die Exponentialfunktion e^x ist, erkennt man am schnellsten durch Nachprüfen der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, e^x = e^x$$

(mittels Kettenregel) zusammen mit $e^0 = 1$. Um die Verbindung mit dem $\mathrm{e}(\alpha)$ des vorigen Abschnitts herzustellen, zerlegt man dieses in N Faktoren:

$$\mathrm{e}(\alpha) = \mathrm{e}(\tfrac{\alpha}{N}) \cdot \cdots \cdot \mathrm{e}(\tfrac{\alpha}{N})$$

Das α/N wird mit $N \to \infty$ beliebig klein. Daher kann man wieder $\mathrm{e}(\frac{\alpha}{N}) = 1 + i\frac{\alpha}{N}$ setzen und erhält

$$\mathrm{e}(\alpha) = \lim_{N\to\infty} \left(1 + \frac{i\alpha}{N}\right)^N = \quad e^{i\alpha}$$

Ausführlicher: siehe `http://www.uni-oldenburg.de/~polley`